

Par Karl SCHWARZSHILD

Document Version1.0 du 04/10/2017 Traduit  
des documents originaux en Allemand Par  
H.TRACCARD

# Etude du champ gravitationnel d'une Boule de fluide incompressible selon la théorie d'Einstein.

Par Karl Schwarzschild

(Déposée le 24 février 1916 [voir page 313].)

§ 1. Comme autre exemple de la théorie de la gravitation d'Einstein, j'ai le champ gravitationnel d'une sphère homogène de rayon fini consistant en un fluide incompressible. L'ajout de la condition d'incompressibilité est nécessaire parce que la gravitation dépend non seulement de la quantité de matière, mais aussi de son énergie, et, par exemple, un corps solide dans un certain état de stress donnerait une gravitation différente de celle d'un liquide.

Ce calcul est la suite de ma communication sur le champ gravitationnel d'un point de masse (référence 1916, p. 189), que je citerais brièvement dans "point de masse".

§ 2. Les équations du champ Einsteinien de gravitation (référence 1915, p. 845) ressemblent généralement à :

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} = G_{\mu\nu} \quad (1)$$

Les grandeurs disparaissent là où rien n'est présent. À l'intérieur d'un fluide incompressible, ils sont déterminés de la manière suivante: Le «tenseur énergie mixte» d'un fluide incompressible au repos est, selon M. EINSTEIN (référence, 1914, p. 1062, le P disparaît à cause de l'incompressibilité):

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p, \quad T_4^4 = \rho_0, \quad (\text{les autres } T_{\mu}^{\nu} \text{ sont nuls}) \quad (2)$$

Où  $p$  est la pression,  $\rho_0$  est la densité constante du liquide. Le tenseur d'énergie covariante est:

$$T_{\mu\nu} = \sum_{\tau} T_{\mu}^{\tau} G_{\nu\tau} \quad (3)$$

C'est encore :

$$T = \sum_{\tau} T_{\tau}^{\tau} = \rho_0 - 3p \quad (4)$$

Et :

$$\kappa = 8\pi k^2$$

où  $k^2$  est la constante gravitationnelle gaussienne. Selon Einstein (référence, 1915, p.845, équation 2a), parties droites des équations de champ sont:

$$G_{\mu\nu} = \left( \Gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (5)$$

Pour que le fluide soit en équilibre, les conditions (ibid., Équation 7a) doivent satisfaire à :

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial T_{\tau}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\mu\nu} \Gamma_{\tau\nu}^{\mu} T_{\mu}^{\nu} = 0 \quad (6)$$

§ 3. De même qu'avec le point de masse, les équations générales pour la sphère doivent également satisfaire à la symétrie de rotation autour du point zéro. En l'état, il est conseillé d'introduire les coordonnées polaires à partir du déterminant 1.

$$x_1 = \frac{r^3}{2}, \quad x_2 = -\cos(\vartheta), \quad x_3 = \phi, \quad x_4 = t \quad (7)$$

L'élément linéaire doit alors avoir la forme, comme dans l'autre cas,

$$ds^2 = f_4 dx_4^2 - f_1 dx_1^2 - f_2 \frac{dx_2^2}{1-x_2^2} - f_2 dx_3^2 (1-x_2^2) \quad (8)$$

de sorte que l'on a:

$$g_{11} = -f_1, \quad g_{22} = -\frac{f_2}{1-x_2^2}, \quad g_{33} = -f_2(1-x_2^2), \quad g_{44} = f_4$$

(les autres  $g_{\mu\nu}$  sont nuls)

Ainsi les fonctions ne dépendent que de  $x_1$

Les solutions (10), (11), (12) s'appliquent également à l'espace extérieur de la sphère:

$$f_4 = 1 - \alpha(3x_1 + \rho)^{-\frac{1}{3}}, \quad f_2 = (3x_1 + \rho)^{\frac{2}{3}}, \quad f_1 f_2^2 f_4 = 1 \quad (9)$$

où  $\alpha$  et  $\rho$  sont deux constantes initialement arbitraires, qui seront déterminées plus loin grâce à la masse et le rayon de notre sphère. Il reste à résoudre les équations de champ pour l'intérieur de la sphère au moyen de l'expression (8). Pour les parties droites on obtient dans l'ordre:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= T_1^1 g_{11} = -p f_1, & T_{22} &= T_2^2 g_{22} = -\frac{p f_2}{1 - x_2^2} \\
T_{33} &= T_3^3 g_{33} = -p f_2 (1 - x_2^2), & T_{44} &= T_4^4 g_{44} = \rho_0 f_4 \\
G_{11} &= \frac{\kappa f_1}{2} (p - \rho_0), & G_{22} &= \frac{\kappa f_2}{2} \frac{1}{1 - x_2^2} (p - \rho_0) \\
G_{33} &= \frac{\kappa f_2}{2} (1 - x_2^2) (p - \rho_0), & G_{44} &= -\frac{\kappa f_4}{2} \frac{1}{1 - x_2^2} (\rho_0 + 3p)
\end{aligned}$$

Inchangées au point de masse (§ 4), les composantes  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  du champ gravitationnel peuvent être déterminées par la fonction  $f$  et les parties gauches des équations de champ. En général ces composantes dans toutes les équations suivantes seront obtenues en se limitant à l'équateur où ( $x_2 = 0$ ):

Tout d'abord, les trois équations de champ:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{4} \frac{1}{f_1^2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{f_2^2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{1}{f_4^2} \left( \frac{\partial f_4}{\partial x_1} \right)^2 = -\frac{\kappa}{2} f_1 (\rho_0 - p) \quad (a)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{f_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) - 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{f_1 f_2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)^2 = -\frac{\kappa}{2} f_2 (\rho_0 - p) \quad (b)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{f_1} \frac{\partial f_4}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{f_1 f_4} \left( \frac{\partial f_4}{\partial x_1} \right)^2 = -\frac{\kappa}{2} f_4 (\rho_0 + 3p) \quad (c)$$

Il en découle l'équation du déterminant :

$$f_1 f_2^2 f_4 = 1 \quad (d)$$

Les conditions d'équilibre (6) fournissent l'équation suivante:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} = -\frac{p}{2} \left( \frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{2}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\rho_0}{2} \frac{1}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial x_1} \quad (e)$$

Il ressort des considérations générales de M. Einstein que les 5 équations précédentes avec les quatre inconnues  $f_1, f_2, f_4, p$  sont compatibles les unes avec les autres.

Nous devons déterminer une solution de ces 5 équations, qui sera sans singularité dans la sphère. Sur la surface sphérique on devra avoir  $p = 0$ , et les dérivées premières des fonctions  $f$  des formules (9) devront rester continues même en dehors de la sphère

Par souci de simplicité, il faut rester loin de l'indice 1 de  $x_1$ .

§ 4. La condition d'équilibre (e) se calcule à l'aide du déterminant dans:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho_0 + p}{2} \frac{1}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial x}$$

Cela peut être intégré immédiatement et donne:

$$(\rho_0 + p)\sqrt{f_4} = \text{Konst} = \gamma \quad (10)$$

Les équations de champ (a) (b) (c) peuvent être résolue par multiplication par les facteurs suivants  $-2, +2 \frac{f_1}{f_2}, -2 \frac{f_1}{f_4}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{f_1^2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{f_2^2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{f_4^2} \left( \frac{\partial f_4}{\partial x} \right)^2 + \kappa f_1 (\rho_0 - p) \quad (a')$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) = 2 \frac{f_1}{f_2} + \frac{1}{f_1 f_2} \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \kappa f_1 (\rho_0 - p) \quad (b')$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial x} \right) = \frac{1}{f_1 f_4} \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_4}{\partial x} + \frac{\kappa}{2} f_4 (\rho_0 + 3p) \quad (c')$$

Si on combine a' + 2b' + c' et a' + c, on obtient ce qui suit en utilisant le déterminant:

$$0 = 4 \frac{f_1}{f_2} - \frac{1}{f_2^2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{f_2 f_4} \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial f_4}{\partial x} + 4\kappa f_1 p \quad (11)$$

$$0 = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) + \frac{3}{f_2^2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 + 2\kappa f_1 (\rho_0 + p) \quad (12)$$

Nous allons ici introduire une nouvelle variable car les résultats au point de masse sont très simples en dehors de la sphère, de sorte qu'ils doivent l'être également pour les équations actuelles, sans  $\rho_0$  et  $p$ .

C'est:

$$f_2 = \eta^{\frac{2}{3}}, \quad f_4 = \zeta \eta^{-\frac{1}{3}}, \quad f_1 = \frac{1}{\zeta \eta} \quad (13)$$

Ensuite d'après (9) on a en dehors de la sphère:

$$\eta = 3x + \rho, \quad \zeta = \eta^{\frac{1}{3}} - \alpha, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \eta^{-\frac{2}{3}} \quad (15)$$

Si ces nouvelles variables sont introduites et qu'en même temps on remplace  $\rho_0 + p$  par  $\gamma f_4^{-\frac{2}{3}}$  selon (10) alors les équations (11) et (12) deviennent :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 3\eta^{-\frac{2}{3}} + 3\kappa \gamma \zeta^{-\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{6}} - 3\kappa \rho_0 \quad (16)$$

$$2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -3\kappa \gamma \zeta^{-\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{6}} \quad (17)$$

L'addition de ces deux équations donne:

$$2\zeta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 3\eta^{-\frac{2}{3}} - 3\kappa\rho_0$$

Le facteur d'intégration de cette équation est  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  et l'intégration donne:

$$\zeta \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = 9\eta^{\frac{1}{3}} - 3\kappa\rho_0\eta + 9\lambda \quad \left( \begin{array}{l} \lambda \text{ est une constante} \\ \text{d'intégration} \end{array} \right) \quad (18)$$

Ceci élevé à la puissance 3/2, donne:

$$\zeta^{\frac{3}{2}} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^3 = \left( 9\eta^{\frac{1}{3}} - 3\kappa\rho_0\eta + 9\lambda \right)^{\frac{3}{2}}$$

Si nous divisons (17) par cette équation, le  $\zeta$  disparaît, et l'équation devient une équation différentielle en  $\eta$ :

$$\frac{2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^3} = \frac{-3\kappa\gamma\eta^{\frac{1}{6}}}{\left( 9\eta^{\frac{1}{3}} - 3\kappa\rho_0\eta + 9\lambda \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Ici  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  est à nouveau le facteur d'intégration et l'intégration donne:

$$\frac{2}{\left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)} = 3\kappa\gamma \int \frac{\eta^{\frac{1}{6}} d\eta}{\left( 9\eta^{\frac{1}{3}} - 3\kappa\rho_0\eta + 9\lambda \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (19)$$

Et enfin :

$$\frac{2}{\left( \frac{\delta \eta}{\delta x} \right)} = 2 \frac{\delta x}{\delta \eta}$$

Ce qui donne après une intégration supplémentaire :

$$x = \frac{\kappa\gamma}{18} \int d\eta \int \frac{\eta^{\frac{1}{6}} d\eta}{\left( 9\eta^{\frac{1}{3}} - 3\kappa\rho_0\eta + 9\lambda \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (20)$$

$x$  est donc fonction de  $\eta$ , et par inversion  $\eta$  est fonction de  $x$ . Il en sera de même pour  $\zeta$  à partir de (18) et (19) et aussi des fonctions  $f$  à partir de (13). Notre problème de quadratures est donc résolu.

§ 5. Maintenant, les constantes d'intégration doivent être déterminées de sorte que l'intérieur de la sphère reste sans singularité et que les valeurs externes des fonctions  $f$  et de leurs dérivées soient continues y compris sur la surface sphérique.

Sur la surface sphérique,  $r = r_a$ ,  $x = x_a$ ,  $\eta = \eta_a$  etc. La continuité de  $\eta$  et de  $\zeta$  peut toujours être conservée par détermination appropriée des constantes  $\alpha$  et  $\rho$  dans (14). Les dérivées restent aussi continues et deviennent d'après (15)

$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_a = 3$  et  $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)_a = \eta^{-\frac{2}{3}}$ , d'après (16) et (18) on a :

$$\gamma = \rho_0 \zeta_a^{\frac{1}{2}} \eta_a^{-\frac{1}{6}}, \quad \zeta_a = \eta_a^{\frac{1}{3}} - \frac{\kappa \rho_0}{3} \eta_a + \lambda \quad (21)$$

Il en découle ce qui suit

$$\zeta_a \eta_a^{-\frac{1}{3}} = (f_4)_a = 1 - \frac{\kappa \rho_0}{3} \eta_a^{\frac{2}{3}} + \lambda \eta_a^{-\frac{1}{3}}$$

Et aussi

$$\gamma = \rho_0 \sqrt{(f_4)_a} \quad (22)$$

On peut voir à partir de la comparaison avec (10) que la condition  $p = 0$  est satisfaite sur la surface. L'exigence  $\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_a = 3$  donne la détermination suivante pour les limites d'intégration dans (19):

$$\frac{3dx}{d\eta} = 1 - \frac{\kappa \gamma}{6} \int_{\eta}^{\eta_a} \frac{\eta^{\frac{1}{6}} d\eta}{\left(9\eta^{\frac{1}{3}} - 3\kappa \rho_0 \eta + 9\lambda\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (23)$$

et (23) et (20) fournissent la détermination suivante des limites d'intégration:

$$3(x - x_0) = \eta - \eta_a + \frac{\kappa \gamma}{6} \int_{\eta}^{\eta_a} d\eta \int_{\eta}^{\eta_a} \frac{\eta^{\frac{1}{6}} d\eta}{\left(\eta^{\frac{1}{3}} - \frac{\kappa \rho_0 \eta}{3} + \lambda\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (24)$$

Les conditions de surface toutes sont remplies. Les deux constantes  $\eta_a$  et  $\lambda$  sont toujours indéterminées, mais elles seront définies par les conditions de continuité à l'origine.

Nous devons d'abord exiger que pour  $x = 0$ , on ait aussi  $\eta = 0$ . Si ce n'était pas le cas alors  $f_2$  serait une variable finie au point zéro, et un changement d'angle  $d\phi = dx_3$  serait effectué au point zéro, ce qui signifie qu'en réalité aucun mouvement contribue à l'équation. Il découle de ceci et de la formule (24) cette condition pour la définition de  $\eta_a$

$$3x_a = \eta_a - \frac{\kappa \gamma}{6} \int_{\eta}^{\eta_a} d\eta \int_{\eta}^{\eta_a} \frac{\eta^{\frac{1}{6}} d\eta}{\left(\eta^{\frac{1}{3}} - \frac{\kappa \rho_0 \eta}{3} + \lambda\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (25)$$

$\lambda$  est finalement déterminé par l'exigence que la pression au centre de la sphère doit rester finie et positive, d'où il découle d'après (10) que  $f_4$  est finie et doit rester nulle. D'après les formules (13), (18) et (23) on obtient :

$$f_4 = \zeta \eta^{-\frac{1}{3}} = \left( 1 - \frac{\kappa \rho_0}{3} \eta^{\frac{2}{3}} + \lambda \eta^{-\frac{1}{3}} \right) \left( 1 - \frac{\kappa \gamma}{6} \int_{\eta}^{\eta_0} \frac{\eta^{\frac{1}{6}} d\eta}{\left( \eta^{\frac{1}{3}} - \frac{\kappa \rho_0}{3} \eta + \lambda \right)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \quad (26)$$

Supposons d'abord  $\lambda \neq 0$ , alors pour  $\eta$  très petit on a:

$$f_4 = \frac{\lambda}{\eta^{\frac{1}{3}}} \left( K + \frac{\kappa \gamma}{7} \frac{\eta^{\frac{7}{6}}}{\gamma^2} \right)^2$$

Où

$$K = 1 - \frac{\kappa \gamma}{6} \int_{\eta}^{\eta_0} \frac{\eta^{\frac{1}{6}} d\eta}{\left( \eta^{\frac{1}{3}} - \frac{\kappa \rho_0}{3} \eta + \lambda \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (27)$$

Au centre ( $\eta = 0$ ),  $f_4$  devient infini sauf lorsque  $K = 0$ . Cependant, si  $K = 0$ ,  $f_4$  disparaît pour  $\eta = 0$ . Dans aucun cas on a une valeur finie et non nulle de  $f_4$  pour  $\eta = 0$ . Il s'ensuit que la condition  $\lambda \neq 0$  ne conduit pas à des solutions physiquement viables, donc  $\lambda = 0$ .

§ 6. Avec la condition  $\lambda = 0$ , toutes les constantes d'intégrales sont définies. Et en même temps, les intégrations à effectuer sont très simples. A la place de  $\eta$ , plaçons une nouvelle variable  $\chi$  dont la définition est:

$$\sin(\chi) = \sqrt{\frac{\kappa \rho_0}{3}} * \eta^{\frac{1}{3}}, \quad \left( \sin(\chi_a) = \sqrt{\frac{\kappa \rho_0}{3}} * \eta_a^{\frac{1}{3}} \right) \quad (28)$$

les équations (13), (26), (10), (24), (25) sont transformées par calcul simple en les suivantes:

$$f_2 = \frac{3}{\kappa \rho_0} \sin^2(\chi), \quad f_4 = \left( \frac{\cos(\chi_a) - \cos(\chi)}{2} \right)^2, \quad f_1, f_2^2, f_4 = 1 \quad (29)$$

$$\rho_0 + p = \rho_0 \left( \frac{2 \cos(\chi_a)}{3 \cos(\chi_a) - \cos(\chi)} \right)^2 \quad (30)$$

$$3x = r^3 = \left( \frac{\kappa \rho_0}{3} \right)^{-\frac{3}{2}} \left[ \frac{9}{4} \cos(\chi_a) \left( \chi - \frac{1}{2} \sin(2\chi) \right) - \frac{1}{2} \sin^3(\chi) \right] \quad (31)$$

La constante  $\chi_a$  est déterminé par la densité  $\rho_0$  et le rayon  $r_a$  de la sphère selon la relation:

$$r_a^3 \left( \frac{\kappa \rho_0}{3} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{4} \cos(\chi_a) \left( \chi_a - \frac{1}{2} \sin(2\chi_a) \right) - \frac{1}{2} \sin^3(\chi_a) \quad (32)$$

Les constantes  $\alpha$  et  $\rho$  de la solution pour l'extérieur découlent de (14) :

$$\rho = \eta_a - 3x, \quad \alpha = \eta^{\frac{1}{3}} - \zeta a,$$

et on obtient les valeurs:

$$\rho = \left(\frac{\chi\rho_0}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} \left[ \frac{3}{2} \sin^3(\chi_a) - \frac{9}{4} \cos(\chi_a) \left( \chi_a - \frac{1}{2} \sin(2\chi_a) \right) \right] \quad (33)$$

$$\alpha = \left(\frac{\chi\rho_0}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} * \sin^3(\chi_a) \quad (34)$$

L'équation à l'intérieur de la sphère se simplifie en utilisant les variables  $\chi, \vartheta, \phi$  au lieu de  $x_1, x_2, x_3$  ( $ix$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variable temps} \\ \text{imaginaire pure} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} ds^2 = \left( \frac{3 \cos(\chi_a) - \cos(\chi)}{2} \right)^2 dt^2 \\ - \frac{3}{\chi\rho_0} (d\chi^2 + \sin^2(\chi) d\vartheta^2 + \sin^2(\chi) \sin^2(\vartheta) d\phi^2) \end{array} \right. \quad (35)$$

En dehors de la sphère, la forme de l'équation reste identique à celle du point de masse:

$$\left\{ \begin{array}{l} ds^2 = \left( 1 - \frac{\alpha}{R} \right) dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} - R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\phi^2) \\ \text{où} \\ R^3 = r^3 + \rho \end{array} \right. \quad (36)$$

Seul  $\rho$  est déterminé selon (33), tandis que pour au point de masse  $\rho = \alpha^3$ .

§ 7. Les remarques suivantes sont liées à la solution complète de notre problème au paragraphe précédent.

1. L'élément linéaire ( $dt = 0$ ) dans la sphère est:

$$-ds^2 = \frac{3}{\chi\rho_0} (d\chi^2 + \sin^2(\chi) d\vartheta^2 + \sin^2(\chi) \sin^2(\vartheta) d\phi^2)$$

C'est l'expression bien connue de la métrique décrivant une hypersphère à trois dimensions et c'est également cette géométrie qui se prête à la description de l'intérieur de la sphère, avec un rayon de courbure  $\sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}}$  la variable  $\chi$  étant limitée à la valeur  $\chi_a$  (\*) Dans le cas du Soleil la valeur de ce

rayon de courbure serait environ de 500 fois le rayon du Soleil ( voir les formules (39) et (42) ).

(\*) NDT : Ce faisant, Schwarzschild considère la géométrie associée à sa solution comme une fibration d'un espace hypersphérique 3D. Il reprend au passage la vision de David Hilbert avec une variable temps imaginaire pure (voir la flèche rouge)

C'est un apport intéressant de la théorie d'Einstein qui alors que la géométrie de l'espace sphérique qui était vue jusqu' à présent comme une simple possibilité, montre la réalité de l'influence de la gravitation des sphères .

Dans la sphère, on mesure bien sûr les grandeurs suivantes:

$$\sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}} d\chi, \quad \sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}} \sin(\chi) d\vartheta, \quad \sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}} \sin(\chi) \sin(\vartheta) d\phi \quad (37)$$

Le rayon "mesuré en interne" du centre de la sphère à sa surface devient:

$$P_i = \sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}} \chi_a \quad (38)$$

La circonférence de la sphère, mesurée le long d'un méridien (ou de tout autre cercle plus grand), et divisée par  $2\pi$ , s'appelle le rayon «extérieur»  $P_a$ . Il s'ensuit :

$$P_a = \sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}} \sin(\chi_a) \quad (39)$$

Après l'expression (36) de l'élément linéaire en dehors de la sphère, ce  $P_a$  est évidemment identique à la valeur  $R_a = (r_a^3 + \rho)^{\frac{1}{3}}$  que la variable  $R$  suppose sur la surface sphérique.

Avec le rayon  $P_a$  on obtient par (34) les relations simples pour  $\alpha$

$$\frac{\alpha}{P_a} = \sin^2(\chi_a) \quad , \quad \alpha = \frac{\chi\rho_0}{3} P_a^3 \quad (40)$$

Le volume de notre sphère est:

$$\begin{aligned} V &= \left( \sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}} \right)^3 \int_0^{\chi_a} \sin(\chi) d\chi \int_0^{\pi} \sin(\vartheta) d\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \left( \sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}} \right)^3 \left( \chi_a - \frac{1}{2} \sin(2\chi_a) \right) \end{aligned}$$

La masse  $M$  de notre sphère est donc ( $\chi = 8\pi k^2$ )

$$M = \rho_0 V = \frac{3}{4k^2} \left( \sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}} \right) \left( \chi_a - \frac{1}{2} \sin(2\chi_a) \right) \quad (41)$$

2. A partir des équations de mouvement d'un point de masse infiniment petite en dehors de notre sphère, et qui conserve la même forme que dans le point de masse (équations (15) - (17)) on fait les observations suivantes:

À grande distance, le mouvement du point suit la loi de Newton, où  $\frac{\alpha}{2k^2}$  joue le rôle de la masse attirante. Par conséquent,  $\frac{\alpha}{2k^2}$  peut s'appeler la «masse gravitationnelle» de notre sphère.

Si un point est abandonné à l'infini au repos et chute vers la surface de la sphère, la vitesse de chute "naturellement mesurée" est donnée par la valeur:

$$v_a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{R}}} \frac{dR}{ds} = \sqrt{\frac{\alpha}{R_a}}$$

Ainsi, selon (40):

$$v_a = \sin(\chi_a) \quad (42)$$

Pour le soleil, la vitesse de chute est d'environ 1/500 de vitesse de lumière. Il est facile de conclure que, avec la faible valeur de  $\chi_a$  et  $\chi (< \chi_a)$  résultant de celle-ci, toutes nos équations, à l'exception des effets du second ordre d'Einstein, peuvent être ignorés dans la théorie de Newton.

3. Pour le rapport de la masse gravitationnelle  $\frac{\alpha}{2k^2}$  à la masse substantielle  $M$

$$\frac{\alpha}{2k^2 M} = \frac{2}{3} \frac{\sin^3(\chi_a)}{\chi_a - \frac{1}{2} \sin(2\chi_a)} \quad (43)$$

Comme la vitesse de chute  $v_a (= \sin(\chi_a))$ , la concentration de masse augmente, le rapport de la masse gravitationnelle à la masse substantielle diminue. Cela s'explique par le fait que, Par exemple, avec une masse constante et une densité croissante, la transition vers un rayon plus petit se produit avec des émissions d'énergie (réduction de la température par rayonnement).

4. **La vitesse de la lumière dans notre sphère est:**

$$v = \frac{2}{3 \cos(\chi_a) - \cos(\chi)} \quad (44)$$

**de sorte qu'elle varie à partir de la valeur sur la surface**

$$\frac{1}{\cos(\chi_a)}$$

**jusqu'à la valeur au centre**

$$\frac{2}{3 \cos(\chi_a) - 1}$$

La variable de pression  $\rho_0 + p$  augmente selon (10) et (30) proportionnellement à la vitesse de la lumière.

**Au centre de la sphère ( $\chi = 0$ ), la vitesse de la lumière et la pression deviennent infinies (...)**

dès que  $\cos(\chi_a) = \frac{1}{3}$ , la vitesse de chute est devenue égale à  $\sqrt{\frac{8}{9}}$  de la vitesse de la lumière (mesurée naturellement).

il y a donc une limite de densité au-delà de laquelle une boule de fluide incompressible ne peut exister. Si nous voulions appliquer nos équations aux valeurs  $\cos(\chi_a) < \frac{1}{3}$ , des discontinuités seraient obtenues en dehors du centre de la sphère.

Cependant, pour  $\chi_a$  plus grand, les solutions continues peuvent être trouvées au moins en dehors du centre de la sphère si on est dans le cas  $\lambda \neq 0$  et en satisfaisant la condition  $K = 0$  (équation (27)).

Sur le chemin de ces solutions, qui sont évidemment **physiquement sans signification**, car elles donnent une pression infinie au centre, nous pouvons passer à la limite d'une masse concentrée à un point, puis trouver aussi la relation  $\rho = \alpha^3$  qui, selon les résultats précédents sont valables au point de masse.

Il convient de noter ici que **l'on ne peut parler d'un point de masse, quand on utilise la variable  $r$** , laquelle ne joue aucun rôle dans la géométrie et le mouvement de notre champ gravitationnel.

Pour un observateur externe qui ferait des mesures, selon (40), il s'ensuit qu'une sphère de masse gravitationnelle donnée  $\frac{\alpha}{2k^2}$  ne peut avoir un rayon mesuré depuis l'extérieur plus petit que:

$$P_a = \alpha$$

Pour une boule de fluide incompressible, la limite est de  $\frac{9}{8\alpha}$ .

Pour le soleil  $\alpha$  est égal à 3 km,

pour une masse de 1 g  $\alpha$  est égal à  $1.5 \cdot 10^{-28} \text{ cm}$ .

---

Envoyé le 6 Avril 1916

---