

ASTROPHYSIQUE THÉORIQUE. — *Modèle tridimensionnel et instationnaire de système stellaire auto-gravitant. Applications aux amas globulaires et aux galaxies.* Note (\*) de M. JEAN-PIERRE PETIT, présentée par M. André Lichnerowicz.

On cherche une solution de Schwarzschild à l'équation de Vlasov telle que l'ellipsoïde des vitesses ait les propriétés suivantes : l'un des axes passe par le centre du système, le second est orthogonal à l'éventuel axe de symétrie et au vecteur position, le troisième formant avec les deux premiers un trièdre trirectangle. Une solution analytique tridimensionnelle apparaît qui semble assez cohérente vis-à-vis des données d'observation sur les amas globulaires et les galaxies.

1. MÉTHODE DE CALCUL. — La fonction de distribution de la vitesse stellaire doit satisfaire l'équation de Vlasov, que nous écrirons en termes de vitesse résiduelle :

$$(1) \quad \frac{\partial \log f}{\partial t} + \vec{C} \cdot \frac{\partial \log f}{\partial \vec{r}} + \vec{C}_0 \cdot \frac{\partial \log f}{\partial \vec{r}} + \left( \vec{g} - \frac{D\vec{C}_0}{Dt} \right) \cdot \frac{\partial \log f}{\partial \vec{C}} - \frac{\partial \log f}{\partial \vec{C}} \cdot \vec{C} : \frac{\partial \vec{C}_0}{\partial \vec{r}} = 0,$$

$\vec{r}$  étant le vecteur position et  $\vec{k}$  le vecteur unitaire porté par l'axe du système. La fonction de distribution correspondant aux hypothèses précitées s'écrit :

$$(2) \quad \log f = \log A - \frac{m C^2}{2kH} + a (\vec{C} \cdot \vec{r})^2 + \alpha [\vec{C} \cdot (\vec{k} \times \vec{r})]^2,$$

H, a et  $\alpha$  étant des fonctions de x, y, z, t et A le facteur de normalisation. Introduisons (2) dans (1). Il vient un système de vingt équations aux dérivées partielles provenant de l'identification sur chacune des composantes de la vitesse résiduelle, variable indépendante. Une solution se dégage lorsque

$$(3) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial a}{\partial \vec{r}} = 0;$$

$$(4) \quad H = \frac{T_0}{1 + \frac{2akT_0}{m} r^2}.$$

$T_0$  ne dépendant que du temps. En posant

$$(5) \quad \vec{r} = (x, y, 0); \quad \frac{m}{2akT_0} = r_0^2; \quad \frac{m}{2\alpha kT_0} = r_0^2.$$

Il vient

$$(6) \quad \boxed{f = n \left( \frac{m}{2\pi kT_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left( 1 + \frac{r^2}{r_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{r^2}{r_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \exp - \frac{m}{2kT_0} \left[ C_r^2 + C_p^2 \left( 1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{r^2}{r_0^2} \right) + C_y^2 \left( 1 + \frac{r^2}{r_0^2} \right) \right]}.$$

On voit que les axes transverses de l'ellipsoïde tendent vers zéro à l'infini, l'axe radial restant, lui, constant. Les termes d'ordre 2 fournissent des renseignements sur le champ de vitesse. La solution  $\vec{C}_0 = \omega(\mathbf{r}) \times \vec{\mathbf{r}} + b\vec{\mathbf{r}}$  fournit  $d\alpha/dt = 0$ ;  $da/dt = 2ab$ ;  $b = -1/2 T_0 (\partial T_0/\partial t)$  et

$$(7) \quad 4a\omega + \frac{d\omega}{dr} \left[ \frac{m}{k T_0 r} + 2ar + 2\alpha r \right] = 0.$$

Posons  $1/r_0^2 + 1/r_*^2 = 1/r_*^2$ ; il vient

$$(8) \quad \omega = \frac{\omega_0}{\left[ 1 + \frac{r^2}{r_*^2} \right]^{\frac{a}{a+\alpha}}}.$$

Lorsque l'exposant  $a/(a+\alpha)$  est égal à l'unité on retrouve le résultat de Chandrasekhar <sup>(1)</sup>, mais en tridimensionnel. Pour la valeur 3/4 on obtient la condition képlérienne et une courbe de Brandt, en tridimensionnel. Si nous situons le Soleil au maximum de vitesse dans notre galaxie et si nous retenons les valeurs des rapports des écarts-types :  $\sigma_r/\sigma_p = 8/5$ ,  $\sigma_r/\sigma_q = 2$ , l'exposant qui s'en déduit est très proche de 3/4.

Venons-en à l'équation correspondant aux termes d'ordre zéro :

$$(9) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{C}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \left( \log n - \log T_0 \left[ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{1 + \frac{r^2}{r_0^2}} + \frac{1}{2} \frac{\frac{r^2}{r_0^2} - \frac{r^2}{r_*^2}}{1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{r^2}{r_*^2}} \right] \right) = 0.$$

Près du centre on retrouve l'adiabaticité. Loin du noyau il vient

$$(10) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{C}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \left( \frac{n}{T_0^{3/2}} \right) = 0.$$

La température translationnelle, égale à  $T_0$  dans le noyau, décroît à l'infini vers la valeur  $T_0/3$ . L'équation associée aux termes d'ordre un s'écrit :

$$(11) \quad \left( \vec{g} - \frac{D\vec{C}_0}{Dt} \right) \cdot \frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} + \vec{C} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \log n + \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{r^2}{r_0^2} \right) \left( 1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{r^2}{r_*^2} \right) \right] = 0.$$

*a. Cas des amas globulaires.* — En introduisant la loi de Poisson et en posant

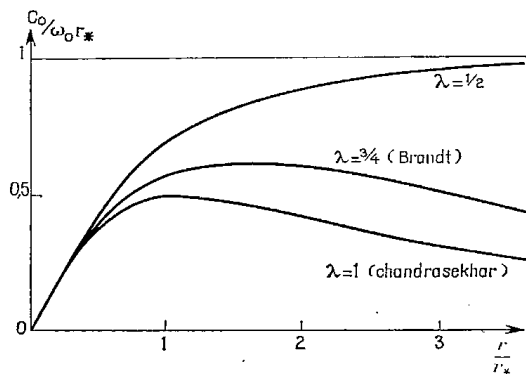
$$(12) \quad \Psi_0 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \log \frac{1}{\sqrt{T_0}} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial t} \log \frac{1}{\sqrt{T_0}} \right)^2 \right\},$$

on trouve aisément

$$(13) \quad \Delta\Psi = \frac{4\pi G\rho_0}{1 + \frac{r^2}{r_0^2}} \exp - \frac{m}{kT_0} (\Psi + \Psi_0)$$

$\rho_0$  et  $r_0$  étant des constantes absolues [voir (7)]. Dans la situation stationnaire  $\Psi_0 = 0$  et on retrouve le modèle d'Eddington (2).

Cette équation, couplée avec (9) devrait permettre de déduire le comportement spatiotemporel des amas globulaires.



Courbes théoriques de rotation

*b. Cas des galaxies.* — Nous n'obtenons d'expression simple que dans le plan diamétral, en situation stationnaire. En posant alors

$$(14) \quad \Psi_1 = -\omega_0^2 \frac{a + \alpha}{a - \alpha} \left(1 + \frac{r^2}{r_*^2}\right)^{-\frac{a-\alpha}{a+\alpha}}$$

et en introduisant l'équation de Poisson nous avons

$$(15) \quad \Delta\Psi = 4\pi G\rho_0 \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp - \frac{m}{kT_0} (\Psi + \Psi_1).$$

*Remarque I.* — Les galaxies et les amas ne sont pas des systèmes isolés placés dans un espace euclidien. Si l'on considère un ensemble d'amas globulaires ou de galaxies on peut chercher à déduire le potentiel décrivant cet ensemble en superposant les solutions correspondant à chacun des éléments. Nous avons vu (3) qu'un effet d'écran du type Debye apparaissait. Par ailleurs, considérons un point de l'espace situé à peu près à équidistance des éléments voisins (amas ou galaxies). La composition des solutions anisotropes attachées à chacun des éléments fournit en ce point une solution maxwellienne construite autour d'une vitesse nulle et d'une température qui se trouve être précisément  $T_0$ .

*Remarque II.* — En écrivant (2) et (7) nous avons particularisé doublement la solution. Il semble que des formes plus élaborées puissent conduire à d'autres solutions, comme la structure spirale stellaire par exemple.

(\*) Séance du 8 décembre 1971.

(<sup>1</sup>) CHANDRASEKHAR, *Dynamics of stellar systems*, Pergamon Press, 1942.

(<sup>2</sup>) EDDINGTON, *Monthly Notices*, 76, 1916, p. 572.

(<sup>3</sup>) J. P. PETIT, *Comptes rendus*, 272, série B, 1971, p. 1389.

*Laboratoire de Dynamique  
des Systèmes réactifs,  
Faculté des Sciences  
de Saint-Jérôme,  
traverse de la Barasse,  
13-Marseille,*

et

*Observatoire de Marseille,  
1, place Leverrier,  
13-Marseille,  
Bouches-du-Rhône.*

