L'algèbre géométrique, un outil simple et efficace pour le physicien ?

Je ne cesse de m'interroger sur les raisons qui font que, en-dehors de quelques domaines spécialisés, l'algèbre géométrique - au sens hestenien du terme - n'arrive pas à être reconnue pour ce qu'elle est réellement, c'est à dire un outil mathématique de portée très générale, dont l'enseignement serait d'une grande utilité dès la dernière phase des études secondaires.

Certes le fait que la GA (geometric algebra) soit isomorphe avec les algèbres de Clifford correspondantes, et que celles-ci puissent recevoir de multiples représentations, a eu pour conséquence qu'à peine extraite de ses lointains et fragiles fonts baptismaux (Grassmann, Hamilton, Clifford), et complètement reconstruite et développée par David Hestenes :

- on lui en a contesté le mérite,

- chacun s'est empressé d'ajouter son grain de sel en construisant des variantes plus ou moins complexes, au sens propre comme au figuré,

- on a vivement (re)théorisé, c'est à dire rendu plus abstrait ce que Hestenes avait utilement simplifié,

- on a de ce fait masqué le caractère simple, très progressif et immédiatement utilisable de l'apprentissage de la GA.

Un exemple pour convaincre.

Je vais tenter d'illustrer cela par un exemple géométrique qui m'a été inspiré par un exercice d'une grande banalité dans les classes de terminale scientifique ou de début de "prépas ": le skieur tracté par un tire-fesse ! Je me suis rendu compte que cet exercice oh combien simplissime le devenait encore davantage si l'on disposait d'une bonne méthode vectorielle de décomposition d'une force dans un repère oblique. Notons tout de suite que pour traiter efficacement ce dernier sujet dans toute sa généralité il faudrait utiliser le calcul tensoriel, qui n'est à ma connaissance pas enseigné en "prépas" et peut-être même pas dans le tronc scientifique commun des Grandes Ecoles ... Or il est possible de déduire l'essentiel des résultats sur la base de règles relativement élémentaires d'algèbre géométrique.

Pour que l'exercice soit plus convainquant que l'exemple du skieur nous allons considérer une situation un peu plus compliquée. Nous nous proposons d'étudier certaines propriétés d'un trièdre oblique, constitué dans $\mathbb{R}^3$ par trois vecteurs unitaires (u, v, w) que nous définissons par les angles arithmétiques $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ associés respectivement aux faces $(v,\ w)$, $(w,\ u)$, $(u,\ v)$. Il est clair que géométriquement cette définition est suffisante, associée à un certain domaine de variation des angles et au choix de l'orientation, directe ou non, du trièdre. Par exemple w peut être obtenu par l'intersection de deux cônes de révolution d'angles au sommet α et β et d'axes u et v .

Nous souhaitons pouvoir déterminer la position de w par exemple par rapport à u et v en le projetant sur le plan (u, v) et sur la perpendiculaire à ce plan. Accessoirement nous souhaitons connaître en fonction de α, β, γ le volume du parallélépipède defini par u, v, w.

Commençons par ce dernier point. Nous savons bien sûr qu'en calcul vectoriel classique ce volume est obtenu par le produit mixte :

(1) $\qquad V = w.(u \times v) = \det(u, v, w)$

où $\times$ désigne l'usuel produit vectoriel (cross product) par opposition au produit extérieur $\wedge$ (wedge product) que nous utiliserons en GA.

En GA donc nous définissons [1]:

(2) $u \wedge v \wedge w = I \det(u, v, w)$ avec $I^2 = -1$

où I représente le pseudoscalaire dans $\mathbb{R}^3$, et où nous supposons pour fixer les idées le trièdre oblique de même orientation que I (de ce fait le déterminant est positif).

En portant cette expression au carré nous obtenons immédiatement :

(3) $\det^2(u, v, w) = -(u \wedge v \wedge w)(u \wedge v \wedge w) = -\{[(u \wedge v \wedge w).u].v\}.w$

ce qui donne en développant successivement les produits contractés :

$$(u \wedge v \wedge w).u = w.u\, u \wedge v - v.u\, u \wedge w + v \wedge w \qquad \text{etc ...}$$

(4) $\det^2(u, v, w) = 1 + 2u.w\, w.v\, v.u - (u.w)^2 - (w.v)^2 - (v.u)^2$

(5) $\det(u, v, w) = (1 + 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma)^{1/2} = V$

Ce résultat est donc obtenu avec une très grande facilité. Pouvons-nous procéder de même en algèbre vectorielle classique ? J'ai d'abord eu la tentation de répondre non, avant de découvrir sur Internet une de ces jolies astuces mathématiques que l'on ne juge évidentes qu'à posteriori. Il s'agit de remarquer que :

(6) $\det(u, v, w) \det(u, v, w) = \det(u, v, w) \det(u^T, v^T, w^T)$

et donc que le déterminant produit correspondant est symétrique et constitué de tous les produits scalaires des vecteurs (u, v, w). En le développant on obtient la formule (5). Il reste que le calcul en GA demande moins d'intuition ; il vient naturellement sous la plume.

La question des projections est plus démonstrative des facilités offertes par la GA. Appelons t le vecteur unitaire, intérieur à l'angle (u, v), et colinéaire avec la projection de w sur le plan (u, v). L'angle formé par ce vecteur w et le plan est φ . D'autre part considérons n perpendiculaire au plan et formant avec (u, v) un trièdre direct (de même sens que I). Nous pouvons alors écrire :

(7) $\mathrm{proj}_{\,uv}\, w = w.t t = t \cos\varphi$

Mais en GA nous avons aussi :

(8) $w = w n^2 = w.n n + w \wedge n n$ et $n = -I u \wedge v / \sin\gamma$

Donc :

(9)
$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_{\,uv}\, w &= w \wedge n n = w \wedge (-I u \wedge v / \sin\gamma)(-I u \wedge v / \sin\gamma) \\
&= -I w.(u \wedge v)(-I)(u \wedge v)/\sin^2\gamma = -(w.u v - w.v u).(u \wedge v)/\sin^2\gamma \\
&= -w.u v.u v + w.u u + w.v v - w.v u.v u)/\sin^2\gamma \\
&= [(-\cos\beta \cos\gamma + \cos\alpha)v + (-\cos\alpha \cos\gamma + \cos\beta)u]/\sin^2\gamma
\end{aligned}$$

En GA on obtient donc immédiatement la décomposition en (u, v) de la projection orthogonale de w sur ce plan. De même la projection sur n de w est obtenue par différence, sans nouveau calcul :

(10) $\mathrm{proj}_n\, w = w - [(-\cos\beta \cos\gamma + \cos\alpha)v + (-\cos\alpha \cos\gamma + \cos\beta)u]/\sin^2\gamma = n \sin\varphi$

Comment obtenir ces résultats en algèbre classique ? Il faut, successivement, poser t en coefficients indéterminés par rapport à (u, v), puis calculer $t.u$ et $t.v$ en introduisant les angles θ et $(\gamma - \theta)$ entre ces vecteurs. Tous calculs faits on obtient :

1. Nous savons démontrer $a \wedge b = I(a \times b)$ et $c \wedge a \wedge b = I c.(a \times b)$.

(11) $\quad \text{proj}_{\,\text{uv}}\, w = [(\cos\theta - \cos\gamma\cos(\gamma-\theta))u + (\cos(\gamma-\theta) - \cos\gamma\cos\theta)v]/\sin^2\gamma = t\cos\varphi$

Comment faire pour exprimer cela uniquement en fonction des angles (α, β, γ), surtout si l'on admet que l'on ne connaît pas déjà le résultat (9). La solution réside en l'application d'un petit théorême de géométrie dans l'espace que les étudiants d'aujourd'hui auront du mal à retrouver : la projection de w sur u est le produit d'une projection sur le plan (u, v) suivie d'une projection sur u. D'où les relations :

(12) $\quad \cos\varphi\cos\theta = \cos\beta \qquad\qquad \cos\varphi\cos(\gamma-\theta) = \cos\alpha$

Il est piquant de noter que ce théorême est une évidence en GA. En effet d'après (7) et(9) :

(13) $\quad w.tt = w\wedge nn = w - w.nn \quad \Rightarrow \quad w.tt.u = w.u - 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi\cos\theta = \cos\beta$

On a alors tous les éléments permettant de calculer les projections.

En conclusion le cheminement en GA est, pour l'exemple étudié, plus simple, plus cohérent et plus efficace qu'un assemblage artisanal de méthodes ad-hoc en algèbre classique.

En élargissant un peu les questions posées on voit que l'on peut facilement, avec la GA, traiter à un niveau élémentaire dans $\mathbb{R}^3$ des questions qui usuellement ne sont abordées que dans les cours de calcul tensoriel.

Considérons en effet dans $\mathbb{R}^3$ une base quelconque e_i $(i\in(1,2,3))$ non-orthonormée. Il est alors utile de définir des vecteurs réciproques e^i qui satisfont aux relations :

(14) $\quad e^i.e_j = \delta^i_j$

Considérons le trivecteur $e_1\wedge e_2\wedge e_3 = E$. Si I est le pseudoscalaire de $\mathbb{R}^3$ de même orientation que $(e_1\wedge e_2\wedge e_3)$ on a:

(15) $\quad e_1\wedge e_2\wedge e_3 = E = I\det(e_1,e_2,e_3) = Ig \qquad I^2 = -1 \qquad g$ scalaire

g est le volume défini par les vecteurs e_i .

Il est facile de montrer que l'on a :

(16) $\quad e^1 = e_2\wedge e_3 E^{-1} \qquad e^2 = e_3\wedge e_1 E^{-1} \qquad e^3 = e_1\wedge e_2 E^{-1}$

(17) $\quad E^{-1} = I^{-1}g^{-1} = -Ig^{-1}$

En effet :

(18) $\quad e_1.e^2 = e_1.(e_3\wedge e_1 E^{-1}) = e_1\wedge e_3\wedge e_1 E^{-1} = 0$

$$e_1.e^1 = e_1.(e_2\wedge e_3 E^{-1}) = e_1\wedge e_2\wedge e_3 E^{-1} = EE^{-1} = 1$$

etc ...

Calculons[2] :

(19)
$$\begin{aligned} e^1\wedge e^2\wedge e^3 &= -g^{-3}(e_2\wedge e_3 I)\wedge(e_3\wedge e_1 I)\wedge(e_1\wedge e_2 I)\\ &= -g^{-3}[I(e_2\wedge e_3).(e_3\wedge e_1 I)]\wedge(e_1\wedge e_2 I)\\ &= -g^{-3}[I(-e_2).(e_3\wedge e_1 I)e_3]\wedge(e_1\wedge e_2 I)\\ &= -g^{-2}(-Ie_3)\wedge(e_1\wedge e_2 I) = -g^{-1}(-Ie_3)\wedge e^3 = Ig^{-1}\end{aligned}$$

Or par définition :

(20) $\quad e^1\wedge e^2\wedge e^3 = I\det(e^1,e^2,e^3) = Ig^{-1}$

2. Soit, ce calcul demande un peu de pratique.

Donc en rapprochant (20) et (15) :

(21) $\det(e^1, e^2, e^3) = 1/\det(e_1, e_2, e_3)$

Les éléments de base nécessaires pour la compréhension et l'exécution des calculs qui précèdent peuvent être acquis en trois ou quatre leçons accompagnées des exercices correspondants.

Mais nous pouvons dès à présent faire beaucoup plus.

Nous allons montrer qu'avec à peine plus de connaissances que les définitions de base du produit géométrique de deux vecteurs, du produit intérieur et du produit extérieur et de la formule :

(22) $ab = a.b + a \wedge b$

ainsi que la notion d'associativité, nous sommes en mesure d'élaborer les outils définissant en GA un opérateur de rotation doté de puissantes propriétés non seulement dans l'espace euclidien tridimensionnel mais dans des espaces beaucoup plus généraux.

Considérons un plan $\mathcal{P}$, immergé ou non dans un $\mathbb{R}^3$, et deux vecteurs unitaires a, b de ce plan. Nous appelons θ l'angle arithmétique entre ces deux vecteurs mesuré selon le plus court chemin. On aura donc $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Nous appelons rotation d'angle θ le mouvement qui fait coincider a avec b en suivant ce chemin. a et b forment le bivecteur $a \wedge b$ qui définit la position du plan $\mathcal{P}$ dans l'espace. Notons tout de suite que nous n'avons pas besoin de définir un vecteur perpendiculaire au plan ni de savoir si nos regardons le plan par au-dessus ou par en-dessous pour définir quel est le sens dans lequel nous tournons . Que de torticolis évités ...

Il nous sera utile pour la bonne compréhension de la suite de définir dans $\mathcal{P}$ un couple quelconque de vecteurs unitaires (e_1, e_2) orthogonaux, de même orientation relative que le couple (a, b). On a :

(23) $e_1 e_2 = e_1 \wedge e_2 = a \wedge b / \sin\theta \qquad (e_1 e_2)^2 = e_1 e_2 e_1 e_2 = -1$

Ce couple est le pseudoscalaire du plan $\mathcal{P}$.

Appelons m le vecteur unitaire de la bissectrice intérieure de l'angle a, b).

Notant que les vecteurs commutent évidemment avec les scalaires et que :

(24) $b \wedge m = -a \wedge m$

on peut écrire successivement :

(25) $b = baa = bmmaa = bmaam = (b.m + b \wedge m)a(a.m + a \wedge m) = (b.m - a \wedge m)a(a.m + a \wedge m)$

(26) $b = (\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} e_1 e_2)\, a\, (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} e_1 e_2) = \tilde{R} a R \qquad \tilde{R}R = 1$

R est ce que l'on appelle un rotor et $\tilde{R}$ son *reverse* (inversion de l'ordre de tous les termes). Cette découpe en deux demi-angles a la remarquable propriété de laisser inchangés dans la rotation les vecteurs perpendiculaires au plan, c'est à dire perpendiculaires au bivecteur $e_1 e_2$. En effet si e_3 est un tel vecteur il commute avec $e_1 e_2$ et l'on a :

(27) $(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} e_1 e_2)\, e_3\, (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} e_1 e_2) = \tilde{R} e_3 R = \tilde{R} R e_3 = e_3$

En conclusion la formule (26) peut représenter la rotation d'un vecteur quelconque non contenu dans le plan du bivecteur $e_1 e_2$.

Remarque : Il n'est évidemment pas nécessaire d'exprimer le bivecteur caractérisant la rotation par une décomposition explicite $e_1 e_2$.

Il est clair que l'expression en GA des rotations présente en général d'immenses avantages par rapport aux autres outils mathématiques. Or nous avons pu définir cette formulation avec des moyens très simples à la portée de débutants ...

Un exemple d'utilisation des rotors.

Le vieux théorême d'Euler sur les rotations équivaut, dans une formulation moderne, à prouver en $\mathbb{R}^3$ que la donnée de deux couples de points unitaires $(e_1,\, f_1)$, $(e_2,\, f_2)$ et d'un point fixe O non aligné avec $(e_1,\, e_2)$ est nécessaire et suffisante pour déterminer la rotation du corps rigide dont la position initiale est caractérisée par (O, e_1, e_2) et la position finale par $(O,\, f_1,\, f_2)$, avec la condition additionnelle de préservation des angles :

(28) $\quad f_2 \,.\, f_1 = e_2 \,.\, e_1$

ce qui assure aussi ici la préservation des distances. On pourra imaginer le cas d'une sphère unitaire qui glisse sur elle-même. Le passage d'une position initiale quelconque à toute autre position finale pourra toujours être défini par une unique rotation, que nous cherchons à évaluer. Géométriquement c'est une évidence, mais l'évaluation analytique n'est pas si simple, et la GA va nous être d'un puissant secours.

Nous savons maintenant qu'une rotation dans $\mathbb{R}^3$ peut être représentée par un rotor :

(29) $\quad R = \cos(\theta/2) + I a \sin(\theta/2) \qquad \tilde{R} = \cos(\theta/2) - I a \sin(\theta/2)$

où I et a sont respectivement le pseudoscalaire dans $\mathbb{R}^3$ et le vecteur unitaire définissant l'axe de rotation, et θ l'angle de rotation. Nous pouvons alors écrire :

(30) $\quad f_1 = \tilde{R}\, e_1\, R \qquad f_2 = \tilde{R}\, e_2\, R$

Il est facile de vérifier que cette définition assure automatiquement la condition (28). Nous pouvons aisément, grâce à la souplesse de la GA, transformer successivement ces relations :

(31) $\quad R f_1 = e_1 R$

(32) $\quad [\cos(\theta/2) + I a \sin(\theta/2)] f_1 = e_1 [\cos(\theta/2) + I a \sin(\theta/2)]$

(33) $\quad \cos(\theta/2)\, f_1 + \sin(\theta/2)\, I\, (a \,.\, f_1 + a \wedge f_1) = \cos(\theta/2)\, e_1 + \sin(\theta/2)\, I\, (a \,.\, e_1 - a \wedge e_1)$

(34) $\quad \cos(\theta/2)(f_1 - e_1) + \sin(\theta/2)\, I a \wedge (f_1 + e_1) + \sin(\theta/2)\, I a \,.\, (f_1 - e_1) = 0$

(35) $\quad \cos(\theta/2)(f_2 - e_2) + \sin(\theta/2)\, I a \wedge (f_2 + e_2) + \sin(\theta/2)\, I a \,.\, (f_2 - e_2) = 0$

En séparant dans ces équations les termes vectoriels des termes pseudoscalaires on obtient donc :

(36) $\quad a \,.\, (f_1 - e_1) = 0 \qquad \cos(\theta/2)(f_1 - e_1) + \sin(\theta/2)\, I a \wedge (f_1 + e_1) = 0$

(37) $\quad a \,.\, (f_2 - e_2) = 0 \qquad \cos(\theta/2)(f_2 - e_2) + \sin(\theta/2)\, I a \wedge (f_2 + e_2) = 0$

En conséquence des relations pseudoscalaires nous pouvons poser :

(38) $\quad a = \lambda I\, (f_1 - e_1) \wedge (f_2 - e_2) \qquad \lambda = |(f_1 - e_1) \wedge (f_2 - e_2)|^{-1}$

Donc :

(39) $\quad \lambda = [(f_1 - e_1)^2 (f_2 - e_2)^2 - (f_1 - e_1) \,.\, (f_2 - e_2)]^{-1/2}$

En remplaçant a dans (36) et (37) par son expression bivectorielle et en simplifiant on obtient deux équations vectorielles :

(40) $\quad \cos(\theta/2) - \lambda \sin(\theta/2)\, (f_2 - e_2) \,.\, (f_1 + e_1) = 0$

(41) $\quad \cos(\theta/2) + \lambda \sin(\theta/2)\, (f_1 - e_1) \,.\, (f_2 + e_2) = 0$

Ces relations , qui permettent de déterminer θ , doivent évidemment être compatibles, ce qui implique :

(42) $$-(f_2-e_2).(f_1+e_1)=(f_1-e_1).(f_2+e_2)$$

ce qui après développement correspond précisément à la condition (28).

En définitive nous obtenons donc :

(43) $$\cot(\theta/2)=\lambda(f_2-e_2).(f_1+e_1)=\lambda(f_2.e_1-f_1.e_2)$$

Se pose évidemment à nouveau la question de savoir comment nous aurions pu faire cette démonstration et ce calcul détaillé des éléments caractéristiques, en algèbre vectorielle classique. Nous aurions évidemment pu définir sans difficulté à l'aide du produit vectoriel le vecteur support de l'axe de rotation (relations 38 et 39). De même nous aurions pu écrire une équation analogue à la définition (30) (formule de Rodrigues) ou une équation matricielle. Mais nous n'aurions pas pu faire de transformations algébriques du type (31) à (37) pour des raisons évidentes et très significatives : ces relations sont de type mixte c'est à dire additionnent des termes de grade différent (scalaires, vecteurs, bivecteurs, pseudoscalaires). Seule l'algèbre géométrique permet ce genre de *mélange*[3], qui est une vaste généralisation des nombres complexes. De ce fait la découverte en algèbre standard de la relation (43) est loin d'être évidente. Je laisse ce soin au lecteur.

Mais nous en sommes encore aux premières leçons d'algèbre géométrique et, malgré tout, avons déjà pu aborder une grande variété de questions ? Pourquoi donc continuons-nous de priver nos étudiants en sciences non seulement de l'enseignement, mais même de la simple prise de conscience de l'existence d'un outil aussi performant ? Question sans réponse ...

G.Ringeisen

Janvier 2012

3. A vrai dire ce mix peut exister en algèbre matricielle, comme le montre l'algèbre de Clifford utilisée en physique quantique ; mais les présentations deviennent alors beaucoup plus abstraites.