



HAL
open science

Masses et Energies positives et négatives, réelles, complexes et Imaginaires

Jean Pierre Petit, F Zejli, Florent Margnat

► **To cite this version:**

Jean Pierre Petit, F Zejli, Florent Margnat. Masses et Energies positives et négatives, réelles, complexes et Imaginaires. 2024. hal-04733996

HAL Id: hal-04733996

<https://hal.science/hal-04733996v1>

Preprint submitted on 13 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Masses et énergies positives, négatives, réelles, complexes et imaginaires.

J.P.Petit, H.Zejli, F.Margnat

Mots-clés : P-symmetry, T-symmetry, dynamic groups, momentum, coadjoint action, extended Poincaré group, orthochron group, antichron set, Kaluza space, paradigm shift, complex Poincaré group, complex mass, imaginary mass.

Résumé : On passe en revue différentes voies qui pourraient se présenter, constituant le changement de paradigme rendu nécessaire par les multiples contradictions qui pèsent de plus en plus sur l'ensemble du modèle standard, qu'il s'agisse de physique des particules ou de cosmologie. Celles-ci sont basées sur la mise en œuvre de nouvelles symétries. On note alors la convergence entre ce qui émane de la mécanique quantique et de la théorie des groupes dynamiques, à savoir les inversions de la masse et de l'énergie. On explore la voie d'une extension au champ complexe.

1 - Introduction :

Sur la tombe du grand mathématicien David Hilbert, à Göttingen, on trouve sa devise, gravée sur sa tombe :

Wir müssen wissen, wir werden wissen

Nous devons savoir et nous saurons

On peut difficilement envisager une ambition aussi illimitée. Mais cette connaissance, après laquelle courent les scientifiques, ne leur échappe-t-elle pas sans cesse ? A cela on peut ajouter une phrase attribuée à Goethe : « Le but, c'est le chemin ». Et c'est peut-être là que se résume le destin de l'homme de science : tenter de progresser en sachant, l'histoire des sciences en témoigne, que tout nouveau pas en avant s'effectuera pour transcender une nouvelle contradiction en attendant la suivante. Le mathématicien Jean-Marie Souriau disait : « les mathématiques sont la grammaire de la Nature ». On pourrait dire que c'est le langage à travers lequel nous nous efforçons de décrire les phénomènes naturels. Un langage qui est appelé à s'enrichir sans cesse par l'adjonction de nouveaux mots et de nouvelles règles de syntaxe et de grammaire. Mais ça ne marche pas toujours. Nous avons trois exemples : les cordes, la matière sombre et l'énergie noire.

La physique théorique, la cosmologie, sont dans une impasse. Depuis de décennies la Nature se refuse à entrer dans le moule que les théoriciens ont construit. La physique des particules avait prédit l'existence des superparticules. Mais celles-ci refusent de se manifester. Jusqu'à présent, les progrès en physique avaient été attachés à une montée de l'énergie mise en jeu dans les collisionneurs de particules. Depuis cet échec, quelle voie suivre ? Certains, au CERN, suggèrent de construire un collisionneur de 91 kilomètres de diamètre, pour un coût de 20 milliards d'euros. But de cette recherche ? Non précisé. Il s'agit simplement de s'aventurer dans un domaine inconnu. Mais, que se passera-t-il si on ne trouve rien de précis, sauf des gerbes encore plus fournies, qui évoquant les étincelles qui jaillissent de l'enclume du forgeron. En cosmologie et astrophysique la matière

sombre refuse de se laisser capturer. Les télescopes spatiaux ont apporté une moisson de problèmes. En 2017 le télescope Hubble avait mis en évidence la présence d'un immense vide, de cent millions d'années-lumière de diamètre, à 600 millions d'années-lumière de la Terre. Par la suite l'observation a confirmé une structure d'univers systématiquement lacunaire. Le télescope spatial James a accru la confusion en découvrant des galaxies entièrement formées, âgées de moins de 300 millions d'années. En, pour clore le tout, les premières images des objets hypermassifs, situés au centre des galaxies M87 et Voie Lactée, qualifiées de trous noirs géants, n'ont pas de parties centrales parfaitement noires. Quelles voies pourraient-elles alors se présenter ? Explorons quelques pistes.

2 - Existence possible d'états d'énergie négative en mécanique quantique.

En mécanique quantique, les états d'énergie négative sont depuis longtemps un sujet de controverse. La théorie quantique des champs utilise les opérateurs d'inversion de l'espace (P) et du temps (T), qui peuvent être linéaires et unitaires, ou antilinéaires et antiunitaires. Historiquement, les physiciens ont souvent évité les états d'énergie négative en choisissant arbitrairement des états P linéaires et unitaires, et T antilinéaires et antiunitaires [1]. Cependant, la découverte de l'accélération de l'expansion cosmique en 2011 a remis en question cette approche. Dans l'équation du champ d'Einstein, ce phénomène peut être interprété par la présence d'une pression négative, une forme de densité d'énergie volumique. En résolvant l'équation de Dirac, Paul Dirac a découvert des solutions avec des termes d'énergie positifs et négatifs :

$$(1) \quad E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Les solutions $E = +\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ correspondent aux énergies positives attendues pour les particules, tandis que celles avec $E = -\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ suggèrent l'existence d'états d'énergie négative. Cette double solution est inhérente à toute théorie relativiste. En mécanique quantique, une énergie négative conduirait à une densité de probabilité négative, ce qui est physiquement inacceptable puisque les probabilités négatives n'existent pas. En effet, en utilisant l'équation de Klein-Gordon, on a :

$$(2) \quad j^0 = \frac{i}{2m} (\Psi^* \partial_t \Psi - \Psi \partial_t \Psi^*)$$

Si la fonction d'onde Ψ est de type onde plane, on a :

$$(3) \quad \Psi(\vec{r}, t) = N e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})}$$

En remplaçant cette fonction dans l'expression j^0 , on obtient :

$$(4) \quad j^0 = \frac{i}{2m} [\Psi^* (-iE\Psi) - \Psi (iE\Psi^*)] = |N|^2 \frac{E}{m}$$

Cela montre que j^0 est proportionnel à E. Ainsi, une énergie négative E conduit à une densité de probabilité négative, ce qui n'est pas acceptable en mécanique quantique. Les solutions à l'équation de Dirac posent un défi similaire. Dirac a introduit quatre solutions : deux avec une énergie positive et deux avec une énergie négative. Pour contourner ce problème, Stueckelberg

et Feynman ont proposé d'interpréter les particules d'énergie négative comme voyageant à rebours dans le temps. Cela signifie qu'en changeant la direction du temps, l'énergie négative peut être transformée en énergie positive. Feynman a illustré cette idée avec des diagrammes, où les particules se déplaçant à rebours dans le temps sont considérées comme des antiparticules. Par exemple, un électron avec une énergie négative peut être interprété comme un positon se déplaçant à rebours dans le temps. Dirac a cependant critiqué cette approche, affirmant que les états d'énergie négative doivent être pris en compte. Chaque solution d'état d'énergie négative correspond à une antiparticule avec une charge opposée. La symétrie CPT (charge, parité et temps) joue un rôle important en physique quantique. Les transformations C, P et T combinées maintiennent la cohérence des états quantiques. Par exemple, la conjugaison de charge C transforme une particule en son antiparticule en inversant la charge :

$$(5) \quad C \psi = i \gamma^2 \psi^*$$

En appliquant cette transformation, les solutions de Dirac peuvent être reliées aux solutions de Feynman-Stueckelberg. La transformation γ^5 , définie par :

$$(6) \quad \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

relie les états d'énergie positifs et négatifs en inversant la masse :

$$(7) \quad \psi_1^- (m \rightarrow -m) = \gamma^5 \psi_1^+$$

Cette transformation suggère que les énergies négatives sont acceptables si elles sont associées à des masses négatives. Ainsi, grâce à l'examen des solutions de Dirac et de Feynman-Stueckelberg et des symétries discrètes C, P et T, l'application unitaire de l'opérateur T et l'application antiunitaire de l'opérateur P à l'équation de Dirac permettent de transformer des particules d'énergie et de masse positives en leurs équivalents négatifs, tout en préservant la norme de l'état quantique. Cette approche est également cohérente avec les principes de la théorie quantique des champs et l'utilisation des champs de Dirac, montrant que l'application d'un potentiel électromagnétique variable à un faisceau de fermions peut les transformer en antifermions de masse négative. Ce processus implique le couplage des opérateurs de création et d'annihilation pour les états de masse positifs et négatifs, fournissant un cadre expérimental pour explorer la nature fondamentale de la matière. [1],[2],[3]. Cette transformation suggère que les énergies négatives sont acceptables si elles sont associées à des masses négatives. Ainsi, en examinant les solutions de Dirac et de Feynman-Stueckelberg et les symétries discrètes C, P, T, et l'application unitaire de l'opérateur T et l'application anti-unitaire de l'opérateur P à l'équation de Dirac permet de transformer des particules d'énergie et de masse positives en leurs équivalents, tout en préservant la norme de l'état quantique. Cette approche est également cohérente avec les principes de la théorie quantique des champs et l'utilisation des champs de Dirac, montrant que l'application d'un potentiel électromagnétique variable à un faisceau de fermions peut les transformer en antifermions de masse négative. Ce processus implique le couplage des opérateurs de création et d'annihilation pour les états de masse positifs et négatifs, fournissant un cadre expérimental pour explorer la nature fondamentale de la matière. Jusqu'en 2011, cela aurait pu sembler justifié. Mais ensuite, un prix Nobel a été décerné aux découvreurs de l'accélération de l'expansion cosmique ([4],[5],[6]). Or, dans l'équation de champ d'Einstein, un tel phénomène peut s'interpréter par la présence d'une pression négative, qui est une densité volumique d'énergie. L'étude des états d'énergie négatifs doit donc être envisagée. La probabilité d'existence de ces états d'énergie négatifs est E/m , m étant la masse. Cette approche impliquerait donc l'introduction de masses négatives dans le modèle cosmologique. Ceci a fait

l'objet d'articles ([7],[8]), dans lesquels nous nous sommes efforcés de nous en tenir aux données observationnelles.

3 – La matière dans la théorie des groupes dynamiques.

En 1970 le mathématicien J.M.Souriau [10] a apporté une définition purement géométrique des grandeurs de la physique que sont l'énergie, l'impulsion, le spin. Pour ce faire il part du groupe d'isométrie de l'espace de Minkowski. Un premier sous-groupe est celui des translations spatio-temporelles

$$(8) \quad C = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Le second sous-groupe est le groupe de Lorentz. Soit X un vecteur de l'espace de Minkowski. Soit G la matrice de Gramm :

$$(9) \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La longueur du vecteur X est :

$$(10) \quad X^t G X$$

Cherchons un groupe qui préserve cette longueur, dont l'élément est représenté par la matrice L qui agit sur le vecteur X selon :

$$(11) \quad X' = L X$$

La conservation de la longueur du vecteur impose que :

$$(12) \quad X^t G X = X'^t G X' = (LX)^t G L X = X^t (L^t G L) X$$

D'où la définition axiomatique du groupe de Lorentz :

$$(13) \quad L^t G L = G$$

En combinant les deux sous-groupes on forme le groupe de Poincaré, groupe d'isométrie de l'espace de Minkowski :

$$(14) \quad \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\xi + C \\ 1 \end{pmatrix}$$

Outre l'action :

$$(15) \quad \xi' = g\xi$$

On a une seconde action :

$$(16) \quad g^{-1}m g$$

Soit l'algèbre de Lie du groupe :

$$(17) \quad \delta g = \begin{pmatrix} \delta L & \delta C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le groupe de Poincaré est de dimension 10. Son algèbre de Lie est donc un espace vectoriel de même dimension. On peut faire agir le groupe sur son algèbre de Lie selon :

$$(18) \quad \delta g' = g^{-1}\delta g g$$

Ceci fait apparaître ce que Souriau appelle le moment μ du groupe, en tant que dual de son algèbre de Lie. Ce qui va permettre de construire l'action du groupe sur son moment, un moment qui sera également de dimension 10. Calculons la matrice inverse de g .

$$(19) \quad \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L' & C' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

$$(20) \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & L^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut différencier autour d'un élément quelconque du groupe. Plaçons-nous au voisinage de l'éléments neutre en posant:

$$(21) \quad L = I + \varepsilon G \omega$$

On a :

$$(22) \quad (I + \varepsilon G \omega)^T G (I + \varepsilon G \omega) = G$$

$$(23) \quad (I + {}^T\varepsilon\omega G) G (I + \varepsilon G \omega) = G$$

$$(24) \quad \omega^T + \omega + \varepsilon \omega^T G \omega = 0$$

Soit, au second ordre près :

$$(25) \quad \omega^T + \omega = 0$$

ω est une matrice antisymétrique. En posant $\delta C = \gamma$ L'élément de l'algèbre de Lie devient :

$$(26) \quad \delta g = Z = \begin{pmatrix} G\omega & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'action sur cette algèbre de Lie devient :

$$(27) \quad \begin{pmatrix} G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{-1} & L^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} G\omega & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$(28) \quad \begin{pmatrix} G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{-1}G\omega L & L^{-1}G\omega C + L^{-1}\gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons L^{-1} .

$$(29) \quad GG = I$$

$$(30) \quad L^{-1}L = I = GG = GL'GL$$

D'où :

$$(31) \quad L^{-1} = GL'G$$

$$(32) \quad G\omega' = L^{-1}G\omega L = GL'GG\omega L = GL'\omega L$$

D'où :

$$(33) \quad \omega' = L'\omega L$$

$$(34) \quad \gamma' = GL'GG\omega C + L^{-1}\gamma = GL'GG\omega C + GL'G\gamma$$

$$(35) \quad \gamma' = GL'\omega C + GL'G\gamma$$

Le moment du groupe de Poincaré est un tenseur :

$$(36) \quad \mu \equiv \{M, P\} \quad \text{with} \quad M^t = -M \quad P \in E_4$$

Il sera défini par l'identité :

$$(37) \quad \mu(Z) \equiv \frac{1}{2} \text{Tr}(M.\omega) + P^t.G\gamma$$

On exprimera la dualité selon :

$$(38) \quad \frac{1}{2} \text{Tr}(M.\omega) + P^t.G\gamma = \frac{1}{2} \text{Tr}(M'.\omega') + P'^t.G\gamma'$$

Ce qui donne :

$$(39) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr}(M.\omega) + P^t.G\gamma &= \frac{1}{2} \text{Tr}(M'.L'\omega L) + P'^t.(GG L'\omega C + GL'G\gamma) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(M'.L'\omega L) + P'^t.L'\omega C + P'^t.L'G\gamma \end{aligned}$$

On peut immédiatement identifier sur γ , ce qui donne :

$$(40) \quad P^t = P'^t L^t \rightarrow P = L P'$$

On sait que quand on a la trace d'un produit si à l'intérieur de celui-ci on effectue une permutation circulaire. On peut donc écrire :

$$(41) \quad \text{Tr}(M^t L^t \omega L) = \text{Tr}(L M^t L^t \omega)$$

Identifions maintenant selon ω

$$(42) \quad \frac{1}{2} \text{Tr}(M \omega) = \frac{1}{2} \text{Tr}(L M'^t L \omega) + {}^t P^t L \omega C$$

Le produit scalaire des deux vecteurs ${}^t P$ et ${}^t L \omega C$ est égal à la trace de la matrice constituée en plaçant les vecteurs dans l'ordre inverse, soit :

$$(43) \quad {}^t P^t L \omega C = \text{Tr}({}^t L \omega C {}^t P)$$

Dans cette trace on peut opérer une permutation circulaire:

$$(44) \quad {}^t P^t L \omega C = \text{Tr}(C {}^t P^t L \omega)$$

d'où :

$$(45) \quad \frac{1}{2} \text{Tr}(M \omega) = \frac{1}{2} \text{Tr}(L M'^t L \omega) + \text{Tr}(C {}^t P^t L \omega)$$

Et :

$$(46) \quad M = L M'^t L + 2C {}^t P^t L$$

On sait qu'une matrice réelle quelconque peut être mis sous la forme d'une demi-somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, ce qui nous donne :

(47)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr}(M \omega) &= \frac{1}{2} \text{Tr}(L M'^t L \omega) \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr}[(C P^t L + L P^t C) \times \omega + (C {}^t P^t L - L P^t C) \times \omega] \end{aligned}$$

La trace du produit d'une matrice symétrique par la matrice antisymétrique ω est égale à zéro. Ce qui lui donne :

(48)

$$\text{Tr}[(C P^t L + L P^t C) \times \omega] = 0$$

Il reste :

(49)

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(M\omega) = \frac{1}{2} \text{Tr}(LM'^tL\omega) + \frac{1}{2} \text{Tr}[(C^tP^tL - LP^tC) \times \omega]$$

Donc au total :

$$(50) \quad M = LM'^tL + CP'^tL - LP'^tC$$

$$(51) \quad P = LP'$$

On a ainsi construit l'action du groupe de Poincaré sur son espace des moments. Si on voulait passer de P' à P cela reviendrait à utiliser l'inverse de l'élément du groupe. Pour simplifier on peut tout simplement écrire :

$$(52) \quad M' = LM'^tL + CP'^tL - LP'^tC$$

$$(53) \quad P' = LP$$

Quel est le sens physique de l'action de ce groupe dynamique ? Par la translation spatio-temporelle on se situe ailleurs et à une autre époque. Le groupe de Lorentz peut être considéré comme le groupe des rotations quadridimensionnelles (auxquelles il faut ajouter des symétries). Il conserve la longueur du vecteur P , qui sera tout simplement le quadrivecteur énergie-impulsion (avec $c = 1$) :

$$(54) \quad P = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Cette conservation se traduira par :

$$(55) \quad E^2 - p^2 = \text{Cst}$$

Le moment avait dix composantes. Une pour l'énergie, trois pour l'impulsion. Il en reste six, que nous allons agencer en matrice antisymétrique :

$$(56) \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -s_z & s_y & f_x \\ s_z & 0 & -s_x & f_y \\ -s_y & s_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{pmatrix}$$

On montre alors que le 3-vecteur f , appelé « passage » par Souriau, peut être annulé quand on accompagne la particule dans son mouvement. Il ne caractérise donc pas un mouvement, en identifiant la nature d'une particule avec le type de mouvement considéré. Le dernier 3-vecteur est le spin, non quantifié, qui émerge alors comme une grandeur de pure géométrie.

$$(57) \quad s = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix}$$

Nous avons ici l'illustration de la stratégie par Souriau [g], qui se résume à ce qui suit :

- On se donne un espace, avec sa métrique et son groupe d'isométrie.
- On écrit l'action coadjointe de ce groupe sur le dual de son algèbre de Lie, de même dimension que ce groupe.
- Les composantes de ce moment définissent alors « une physique », celle dont « le terrain de jeu » est cet espace particulier.

Pour illustrer cette technique nous allons partir de l'espace euclidien 3D. Sa métrique est :

$$(58) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Sa matrice de Gramm est alors la matrice unité I_4 . Son groupe d'isométrie est le groupe d'Euclide :

$$(59) \quad \begin{pmatrix} a & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices a sont alors les matrices orthogonales, définies par :

$$(60) \quad a^t a = I$$

C est le vecteur des translations 3D :

$$(61) \quad C = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Le groupe d'Euclide, de dimension 6, peut être considéré comme un groupe dynamique particulier, celui de la statique. Le calcul précédent peut être reconduit. Le moment se compose alors de deux 3-vecteurs qui seront alors assimilés à une force et à un couple de torsion. Les composantes du moment permettent d'effectuer des sommations. En statique on sommera des forces et des moments de torsion, en dynamique, des énergies, des impulsions et des spins. En 3D ce qui « habite » l'espace euclidien, considéré comme lié à la statique, ce sont des états de contrainte d'un matériau uniforme et infini. En 4D ce sont des classes de mouvements, chaque classe étant assimilée à un type de particule. Ces mouvements s'inscrivent le long de géodésiques de l'espace de Minkowski. De longueur non nulle il s'agit de masses, de longueur nulle de photons.

Le groupe d'Euclide a deux composantes connexes. Une propriété héritée de son sous-groupe, celui des matrices orthogonales, selon que l'espace est ou non inversé, selon qu'on envisage les groupes $O(3)$ ou $SO(3)$.

Revenons maintenant au groupe de Poincaré.

4 – Les groupes dynamiques et le réel.

Hilbert pensait que les mathématiques constituaient une sorte de lampe éclairant le chemin de la connaissance. Dans son attitude résolument optimiste il était convaincu que, face à quelque problème, émergerait toujours à bon escient un outil mathématique qui permette de trouver des solutions, quitte à ce que celui-ci se comporte comme une clé permettant d'actionner une porte donnant sur un nouveau domaine du réel.

A titre d'exemple, quand la théorie des groupes dynamiques permet d'intégrer des grandeurs de la physique dans un contexte géométrique, celui-ci suggère au passage une extension du « terrain de jeu » avec des nouveaux objets. En effet le groupe de Lorentz a quatre composantes connexes.

- Les éléments $\{ L_n \}$ constituent la composante neutre, parce que, contenant l'élément neutre, il sont un sous-groupe de $\{ L \}$. Ils n'inversent ni le temps, ni l'espace.
- Les éléments $\{ L_s \}$ inversent l'espace, mais pas le temps.
- Les éléments $\{ L_t \}$ inversent le temps, mais pas l'espace.
- Les éléments $\{ L_{st} \}$ inversent à la fois le temps et l'espace.

En regroupant les deux premiers éléments on forme :

- Le groupe orthochrone $\{ L_o \} = \{ L_n \} \cup \{ L_s \}$, sous-groupe de $\{ L \}$, appelé aussi groupe de Lorentz restreint.
- Le sous ensemble antichrone $\{ L_a \} = \{ L_t \} \cup \{ L_{st} \}$

Le groupe de Poincaré hérite de ces propriétés avec quatre composantes connexes. Le sous-groupe de Poincaré orthochrone, appelé aussi groupe de Poincaré restreint, était le seul dont les scientifiques faisaient usage. Mais alors, que faire de ses composantes antichrones ?

Nous pouvons jouer sur la propriété :

$$(62) \quad \{ L_t \} = - \{ L_s \} \quad \{ L_{st} \} = - \{ L_n \}$$

Qui entraîne :

$$(63) \quad \{ L_{st} \} = - \{ L_o \}$$

D'où la représentation du groupe de Lorentz complet

$$(64) \quad \{ L \} = \{ \lambda L_o \} \quad \text{avec} \quad \lambda = \pm 1$$

Ce qui nous permet de réécrire le groupe de Poincaré complet, ou « étendu » :

$$(65) \quad \begin{pmatrix} \lambda L_o & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et l'action :

$$(66) \quad M' = L_o M {}^t L_o + \lambda C P {}^t L_o - \lambda L_o P {}^t C$$

$$(67) \quad P' = \lambda L_o P$$

Nous obtenons ainsi la signification physique de l'inversion de la coordonnée de temps, de la T-symétrie. ($\lambda = -1$)

- Elle inverse l'énergie (donc la masse à travers $E = m c^2$) et l'impulsion
- Elle laisse le spin inchangé

On voit donc apparaître le même « message » qu'en mécanique quantique, sous la forme d'une incitation à envisager une extension du champ physique incluant les énergies et les masses négatives.

5 - Une autre extension de la théorie des groupes dynamiques.

Pour ce moment notre « monde réel » n'est peuplé que de photons et de masses dépourvues de charge électrique. Dès 1915 D.Hilbert avait tenté d'inclure les phénomènes électromagnétiques dans un formalisme géométrique. Comme à l'époque la mécanique quantique n'avait pas encore émergé, pas plus que la physique des hautes énergies les scientifiques de l'époque ne connaissaient que deux forces : la force de gravitation et la force électromagnétique. Hilbert publia donc en 1915 et 1916 un essai intitulé « Fondements de la physique ». Dans la première version, présentée le 20 novembre 1915 [11] se trouvait la première présentation de l'équation de champ, qu'Einstein présenta cinq jours plus tard [12], dans la même revue. D'un commun accord la paternité de ce qui allait constituer le fondement de la relativité générale fut laissée à Einstein. Ci-après l'équation de champ publiée par Hilbert:

Unter Verwendung der vorhin eingeführten Bezeichnungsweise für die Variationsableitungen bezüglich der $g^{\mu\nu}$ erhalten die Gravitationsgleichungen wegen (20) die Gestalt

$$(21) \quad [\sqrt{g} K]_{,\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0.$$

Das erste Glied linker Hand wird

$$[\sqrt{g} K]_{,\mu\nu} = \sqrt{g} (K_{,\mu\nu} - \frac{1}{2} K g_{\mu\nu}),$$

Fig.1 : L'équation de champ de David Hilbert, 20 novembre 1915 [11]

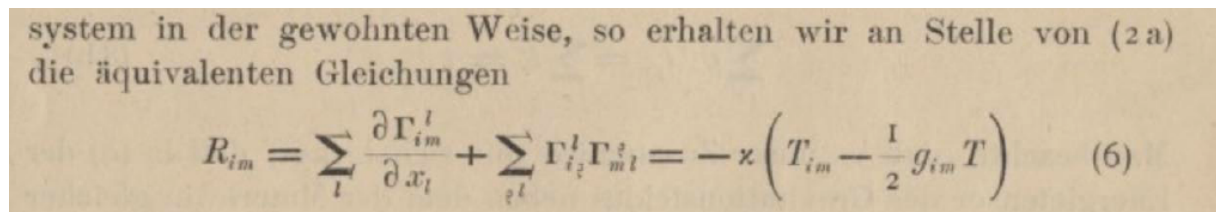


Fig.2 : La même, publiée par Einstein le 25 novembre 1915 [12]

Hilbert désigne par $K_{\mu\nu}$ et K le tenseur et le scalaire de Ricci. Dans l'équation d'Einstein, celui-ci place, dans le second membre, le scalaire de Laue T . Ces formulations sont équivalentes. Mais celle d'Einstein peut être considérée comme plus aboutie. Jusqu'à sa mort, en 1955, Einstein poursuit le projet d'intégrer dans une même équation de champ gravitation et électromagnétisme sans y parvenir. En fait c'est impossible avec seulement 4 dimensions. Cette tentative d'extension fut opérée en 1921 par Theodor Kaluza [13] et en 1926 par Oskar Klein [14]. Le calcul complet fut donné par J.M.Souriau en 1964 [15]. C'est un travail très peu connu car publié uniquement en français. Dans cet ouvrage figure la traduction géométrique de la symétrie matière-antimatière, par inversion de la cinquième dimension. On va donc étendre ce contexte dimensionnel à un espace 4D, dit de Kaluza, où la cinquième dimension ζ est de type espace, c'est à dire où la métrique devient :

$$(68) \quad ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - d\zeta^2$$

La matrice de Gramm devient :

$$(69) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si on recherche le groupe d'isométrie d'un tel espace, il sera constitué par le produit du sous-groupe des translations pentadimensionnelles :

$$(70) \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \zeta \end{pmatrix}$$

Et du sous-groupe Λ qu'on pourrait qualifier de « Lorentz étendu », axiomatiquement défini par

$$(71) \quad \Lambda^t \Gamma \Lambda = \Gamma$$

Il est alors possible de reconduire l'ensemble du calcul du moment, étant donné que le nombre des dimensions n'y figure pas explicitement. On peut, d'emblée, utiliser le théorème de Noether en disant que, s'il y a un sous-groupe à un paramètre, des translations selon une dimension additionnelle, ceci doit aller de pair avec la conservation d'un scalaire q , qu'on assimilera alors à la charge électrique. Cette charge constituera une onzième composante du moment d'un groupe dynamique de dimension 11. Mais cette démarche, dans toute sa généralité, briserait la constance de la charge électrique. On peut alors ne considérer qu'un sous-groupe de ce groupe de Lorentz étendu :

$$(72) \quad \begin{pmatrix} \lambda L_0 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda = \pm 1 \\ \mu = \pm 1 \end{matrix}$$

Ce sous-groupe n'agit sur le scalaire supplémentaire, sur cette charge électrique q , que de deux façons.

- Il conserve cette charge électrique q
- Il l'inverse

Nous pouvons alors construire un sous-groupe de cette extension du groupe de Poincaré complet en combinant avec le sous-groupe des translations pentadimensionnelles :

$$(73) \quad \begin{pmatrix} C \\ \phi \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et en désignant par ϕ l'accroissement $\Delta \zeta$:

$$(74) \quad \begin{pmatrix} \lambda L_0 & 0 & C \\ 0 & \mu & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda L_0 \xi + C \\ \mu \zeta + \phi \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda = \pm 1 \\ \mu = \pm 1 \end{array}$$

C'est un groupe dynamique où l'adjonction de la symétrie d'inversion de charge porte le nombre des composantes connexes à 8. Le calcul d'action sur le moment ne présente pas de difficulté. En posant $\delta\phi = \beta$ l'élément de l'algèbre de lie du groupe est la matrice de format (5,5) :

$$(53) \quad Z = \begin{pmatrix} G\omega & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'inverse de la matrice du groupe est

$$(75) \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda L_0^{-1} & 0 & \lambda L_0^{-1} C \\ 0 & \mu & -\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La dualité est assurée par la constance du scalaire :

$$(76) \quad \frac{1}{2} \text{Tr}(M\omega) + {}^t P G \gamma + q\varepsilon = \frac{1}{2} \text{Tr}(M'\omega') + {}^t P' G \gamma' + q'\varepsilon'$$

L'expression de l'action du groupe sur le dual de son algèbre de lie se traduit finalement par l'adjonction d'une dimension supplémentaire :

$$(77) \quad q' = \mu q$$

$$(78) \quad M' = L_0 M {}^t L_0 + \lambda C P {}^t L_0 - \lambda L_0 P {}^t C$$

$$(79) \quad P' = \lambda L_0 P$$

On passant à l'espace de Kaluza et en introduisant une symétrie sur la cinquième dimension on donne corps à l'idée de J.M.Souriau [15]. Ajoutons que dans le chapitre V de [10] celui-ci montre comment la compactification de cette cinquième dimension permet de retrouver l'équation relativiste de Klein-Gordon. On voit donc comment La théorie des groupes dynamiques et la théorie des champs, y compris dans sa version mécanique quantique, se répondent.

6 - La question du changement de paradigme.

Comme évoqué dans l'introduction, l'échec de mise en évidence d'une matière sombre, d'identification d'une énergie noire, de modélisation de la structure lacunaire de l'univers et de la naissance anormalement précoce, en son sein, des étoiles et des galaxies, a fait naître l'idée d'un nécessaire changement de paradigme. Celui-ci impliquera nécessairement une révision du contexte géométrique puisque le modèle de la relativité générale ne parvient plus à rendre compte des observations. On mentionnera donc deux voies. La première consiste à faire l'hypothèse de l'existence d'un second univers, CPT symétrique du nôtre, que les auteurs situent alors de l'autre côté du Big Bang [16]. Plus récemment N.Kumar [17] a envisagé de faire interagir ces deux univers par intrication (« entanglement ») et montré qu'alors ceci entraînait l'accélération de l'expansion dans notre propre univers. La T-symétrie évoquent ce qui avait déjà été prévu dès les années soixante par Andréi Sakharov ([18],[19],[20]). L'image didactique 2D est alors ce qui suit :

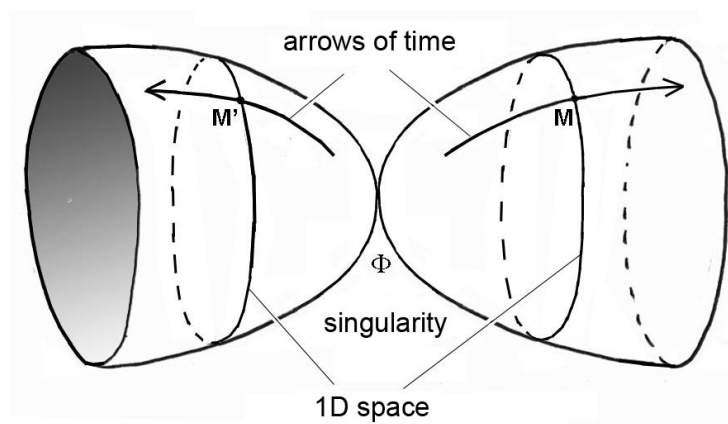


Fig.3 : Image didactique 2D du Modèle de Sakharov, Boyle, Finn, Turok [16] and Kumar[17].

Un autre façon d'envisager les choses est le modèle cosmologique Janus ([21],[22],[23],[24],[25]) Avec une structure en revêtement à deux feuillets :

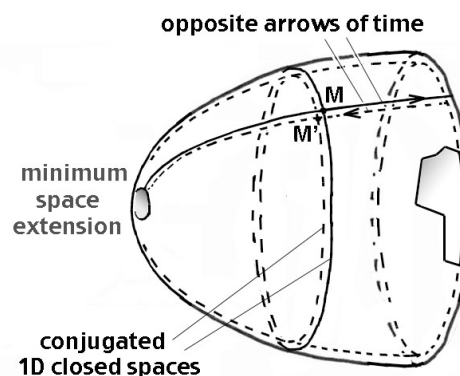


Fig.4 : Image didactique 2D du Modèle Cosmologique Janus.

Traduisons cette CPT-symétrie en termes de groupe dynamique. Cela donne le groupe Janus [8].

$$(80) \quad \begin{pmatrix} \lambda L_0 & 0 & C \\ 0 & \lambda\mu & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda L_0 \xi + C \\ \lambda\mu\zeta + \phi \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda = \pm 1 \\ \mu = \pm 1 \end{matrix}$$

Algèbriquement, le calcul est très peu différent. Seule la première équation se trouve modifiée.

$$(81) \quad q' = \lambda\mu q$$

$$(82) \quad M' = L_0 M L_0 + \lambda C P L_0 - \lambda L_0 P C$$

$$(83) \quad P' = \lambda L_0 P$$

La CPT-symétrie correspond à $\lambda = -1$. Vis à vis d'une comparaison avec l'observation, ce modèle donne des résultats intéressants, dont une description chiffrée de l'accélération de l'expansion cosmique [9].

Mais ici une remarque, d'ordre géométrique, s'impose. Dans le modèle Janus 4D on suggère que l'hypersurface univers, la variété V4 soit le revêtement à deux feuillet d'un projectif P4. Ce dernier est inorientable et la configuration du revêtement li les deux 4-feuillets adjacents dans une PT-symétrie. Mais si on envisage d'ajouter une dimension supplémentaire en obtenant alors un modèle Janus 5D la configuration en revêtement ne donne pas la symétrie CPT escomptée. En effet les espaces projectifs de dimension impaire sont orientables, alors que le projectifs de dimensions paires sont inorientable. Dans le revêtement à deux feuillet d'un projectif P5 les deux feuillet héritent de l'orientation du projectif. Si on veut accroître le nombre des dimensions il faudra le faire avec un nombre pair de dimensions, soit passer de 4 à 6, 8 ou 10. On notera au passage que ce chiffre de dix dimensions est celui sur lequel aboutissent les gens des cordes.

7 - Ajout de dimensions supplémentaires.

La charge électrique q n'est qu'une des charges quantiques, comme sont la charge baryonique q_b , la charge leptonique q_λ , la charge muonique q_μ . Sans ce qui précède on a vu que l'apparition de la charge électrique découlait de l'adjonction d'une dimension supplémentaire. On peut alors envisager l'adjonction de p dimensions supplémentaires, en nombre pair, selon :

$$(84) \quad X = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ \zeta^1 \\ \dots \\ \zeta^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ \zeta^1 \\ \dots \\ \zeta^p \\ 1 \end{pmatrix}$$

En introduisant les vecteurs « charges-quantiques ζ » et « translations quantiques ϕ »:

$$(85) \quad \zeta = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \dots \\ \zeta^p \end{pmatrix} \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \dots \\ \phi^p \end{pmatrix}$$

Toujours en limitant le groupe de Lorentz étendu à :

$$(86) \quad \begin{pmatrix} \lambda L_0 & 0 & \dots & 0 & C \\ 0 & \lambda\mu & \dots & 0 & \phi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\mu & \phi_p \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta^1 \\ \dots \\ \zeta^p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda L_0 \xi + C \\ \lambda\mu \zeta^1 + \phi_1 \\ \dots \\ \lambda\mu \zeta^p + \phi_p \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda = \pm 1 \\ \mu = \pm 1 \end{matrix}$$

On peut, au passage, étendre le groupe Janus en $4 + p$ dimensions. Ceci se traduira par l'ajout de p charges quantiques avec la relation :

$$(87) \quad q_i' = \lambda\mu q_i$$

De plus, en étendant la construction de Souriau, si ces p dimensions sont compactes, alors ces p charges additionnelles sont quantifiées.

8 - Extension en complexe.

Il existe de nombreux travaux représentant des tentatives de resituer le formalisme de la relativité générale dans un champ complexe, en envisageant une cosmologie quantique ([27],[27],[28]). Voyons ce que cela donnerait dans le cadre de la théorie des groupes

dynamiques. On va considérer ces 4-vecteurs, appartenant à un espace complexe, avec les notations transposée et adjointe :

$$(88) \quad X = \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} \quad X^T = (X^0, X^1, X^2, X^3)$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}^0 \\ \bar{X}^1 \\ \bar{X}^2 \\ \bar{X}^3 \end{pmatrix} \quad X^* = (\bar{X}^0, \bar{X}^1, \bar{X}^2, \bar{X}^3)$$

La métrique, avec un ds réel, se rapporte à un espace de Hermite :

$$(89) \quad ds^2 = (dX^0)^* dX^0 - (dX^1)^* dX^1 - (dX^2)^* dX^2 - (dX^3)^* dX^3$$

La matrice de Gramm, réelle, est donc :

$$(90) \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La longueur

$$(91) \quad \langle X, X \rangle = X^* G X$$

Est encore ici invariante par translation, selon le vecteur des translations complexes :

$$(92) \quad C = \begin{pmatrix} \Delta X^0 \\ \Delta X^1 \\ \Delta X^2 \\ \Delta X^3 \end{pmatrix}$$

Soit L l'élément L d'un groupe va faire passer d'un vecteur X à un vecteur X selon $X' = L X$

Si la longueur de X est conserve, alors $\langle X', Y' \rangle = \langle X, Y \rangle$ ce qui s'écrit :

$$(93) \quad (LX)^* G L X = X^* G X$$

ce qui donne la définition axiomatique d'un groupe de Lorentz complexe :

$$(94) \quad L^* G L = G$$

On construit alors un groupe de Poincaré complexe:

$$(94) \quad \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La dimension du groupe de Lorentz complexe est $12+4 = 16$ (les composantes imaginaires de la diagonale principale). Le groupe de Poincaré complexe a une dimension $18+8 = 24$.

L'élément de son algèbre de Lie est :

$$(96) \quad Z \equiv \begin{pmatrix} \delta L & \delta C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & \Gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(97) \quad \delta[L^* G L] = 0$$

$$(98) \quad (\delta L)^* G L + L^* (G \delta L) = 0$$

En différenciant autour de la matrice unité, il vient ;

$$(99) \quad (\delta L)^* G + (G \delta L) = 0$$

Soit :

$$(100) \quad (G \delta L)^* + G \delta L = 0$$

Donc $G \delta L$, est une matrice antihermitienne. On écrira donc l'élément de l'Algèbre de Lie :

$$(101) \quad Z = \begin{pmatrix} G \Omega & \Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ω étant une matrice antihermitienne. Formons l'inverse de l'élément du groupe est

$$(102) \quad L^* G L = G \rightarrow L^* G L L^{-1} = G L^{-1} \rightarrow L^* G = G L^{-1} \rightarrow G L^* G = G G L^{-1}$$

$$(103) \quad L^{-1} = G L^* G$$

L'action coadjointe du groupe sur son algèbre de Lie donne :

$$(104) \quad \begin{pmatrix} G \Omega' & \Gamma' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{-1} & L^{-1} C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} G \Omega & \Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne :

$$(105) \quad \Omega' = L^* \Omega L$$

$$(106) \quad \Gamma' = G L^* \Omega C + G L^* G \Gamma$$

Dans une matrice antihermitienne les termes diagonaux ne sont pas nuls

$$(107) \quad \Omega = \begin{pmatrix} i\omega_{11} & \bar{\Omega}_{12} & \bar{\Omega}_{13} & \bar{\Omega}_{14} \\ -\Omega_{12} & i\omega_{22} & \bar{\Omega}_{23} & \bar{\Omega}_{24} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & i\omega_{33} & \bar{\Omega}_{34} \\ -\Omega_{14} & -\Omega_{24} & -\Omega_{34} & i\omega_{44} \end{pmatrix}$$

On a donc ces seize composantes, six complexes et quatre imaginaires pures

$$(108) \quad \left\{ \Omega_{sx}, \Omega_{sy}, \Omega_{sz}, \Omega_{fx}, \Omega_{fy}, \Omega_{fz}, i\omega_{11}, i\omega_{22}, i\omega_{33}, i\omega_{44} \right\}$$

Les lettres majuscules désigneront des quantités complexes, le lettre minuscules des grandeurs réelles. Au total nous avons :

$$(109) \quad Z = \left\{ \Omega_{sx}, \Omega_{sy}, \Omega_{sz}, \Omega_{fx}, \Omega_{fy}, \Omega_{fz}, \Gamma_t, \Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z, i\omega_{11}, i\omega_{22}, i\omega_{33}, i\omega_{44} \right\}$$

Soit vingt-quatre quantités qui seront associées à un moment complexe :

$$(110) \quad \mu = \left\{ S_x, S_y, S_z, F_x, F_y, F_z, E, P_x, P_y, P_z, i\theta_{11}, i\theta_{22}, i\theta_{33}, i\theta_{44} \right\}$$

On aura une énergie complexe, et une masse complexe :

$$(111) \quad E = e + i\varepsilon \quad m = m + i\mu$$

On pourra former un quadrivecteur impulsion-énergie complexe :

$$(112) \quad P = \begin{pmatrix} E \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

En combinant les vecteurs S, F, iθ on forme une matrice complexe M :

$$(113) \quad M = \begin{pmatrix} i\theta_{xx} & -\bar{S}_z & S_y & F_x \\ S_z & i\theta_{yy} & -\bar{S}_x & F_y \\ -\bar{S}_y & S_x & i\theta_{zz} & F_z \\ -F_x & -F_y & -F_z & i\theta_{tt} \end{pmatrix}$$

Combinée avec le quadrivecteur impulsion-énergie nous aurons le moment complexe :

$$(114) \quad \text{complex momentum} \equiv \{M, P\} \quad \text{with} \quad M^* = -M \quad ; \quad P \in \mathbb{C}^4$$

Nous pourrions exprimer la dualité à l'aide d'une quantité M

$$(115) \quad M(Z) = \frac{1}{2} \text{Tr}(M \Omega) + P^* G \Gamma$$

Ceci se traduisant par:

$$(116) \quad \frac{1}{2} \text{Tr}(M \Omega) + P^* G \Gamma = \text{Tr}(M' \Omega') + P'^* G \Gamma'$$

D'où :

$$(117) \quad \frac{1}{2} \text{Tr}(M \Omega) + P^* G \Gamma = \frac{1}{2} \text{Tr}(M' L^* \Omega L) + P'^* G (G L^* \Omega C + G L^* G \Gamma)$$

$$(118) \quad \frac{1}{2} \text{Tr}(M \Omega) + P^* G \Gamma = \frac{1}{2} \text{Tr}(M' L^* \Omega L) + P'^* L^* \Omega C + P'^* L^* G \Gamma$$

L'identification sur les termes en γ donne :

$$(119) \quad P^* = P'^* L^* \rightarrow P = L P'$$

9 - Conclusion.

Ce qui est peut-être le plus intéressant dans le tour d'horizon que nous venons de faire est le fait que les inversions de l'énergie et de la masse apparaissent à la fois dans la théorie quantique des champs et dans celle des groupes dynamiques. Une approche qui, à travers le modèle cosmologique Janus, trouve son répondant en géométrie différentielle. On suggère en outre une interprétation géométrique des charges quantiques et de la symétrie matière antimatière. Enfin, on explore des aspects d'une extension dans le champ complexe, avec un emploi possible en physique théorique, à moins que ceci ne débouche sur un couple physique+métaphysique.

References.

- [1] Steven Weinberg : The quantum theory of fields, Cambridge University Press, 2005.
- [2] Riess, A. G., et al. 1998, ApJ, 116, 1009
- [3] Perlmutter, S., et al. 1999, ApJ, 517, 565
- [4] B.Schmidt Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and cosmological constant. Astron. J. 116, pp 1009-1038 (1998).
- [5] N.Debergh, J.P.Petit and G.D'Agostini : Evidence of negative energies and masses in the Dirac equation through a unitary time-reversal operator. , J. Phys. Comm. **2** (2018) 115012
- [6] N.Debergh, J.P.Petit. On some reasons why the rime reversal operator could be unitary. Phys. Lett. A 422, (2022) 127791

- [7] N.Debergh, J.P.Petit. On spacetime algebra and its relations with negative masses. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03683117>
- [8] J.P.Petit, G.D'Agostini : Negative Mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy. *Astrophysics And Space Science*, A **29**, 145-182 (2014)
- [9] G. D'Agostini and J.P.Petit : Constraints on Janus Cosmological model from recent observations of supernovae type Ia, *Astrophysics and Space Science*, (2018), 363:139.<https://doi.org/10.1007/s10509-018-3365-3>
- [10] J.M.Souriau : Structure des systèmes dynamiques. Dunod Ed. France, 1970 and Structure of Dynamical Systems. Boston, Birkhäuser Ed. 1997
- [11] D.Hilbert. Die Grundlagen der Physik (Esste Mitteilung). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse.* (1915) 395-407.
- [12] A. Einstein : Die Feldgleichungen der Gravitation (The Field Equation of Gravitation). *Sitzungsber. XLIV* , 8 , 778 and *XLVI* s. 799 (25 nov 1915)
- [13] T.Kaluza. *Sitzungsber Preuss Akad. Wiss. Berlin Math. Phys. K1*, 966
- [14] O.Klein. *Z ; Phys.* 37, 895
- [15] J.M.Souriau : Géométrie et Relativité. Ed. Hermann, 1964 (french edition only).
- [16] L.Boyle, K.Finn, N.Turok. CPT-symmetric universe. *Physical Review Letters* 121, 251301 20 dec. 2018
- [17] N.Kumar On the Accelerated Expansion of the Universe. *Gravitation and Cosmology*, 2024, Vo.30, n°1 ; pp. 85-88
- [18] A.D.Sakharov, *ZhETF Pis'ma* 5 : 32 ; *JETP Lett.* 5 : 24 (1967)
- [19] A.D.Sakharov , *ZhETF Pis'ma* 76 : 1172 (1979) ; *JETP* 49 : 594 (1979)
- [20] A.D.Sakharov , (1980). Cosmological Model of the Universe with a Time Vector Inversion. *ZhETF (Tr. JETP* 52, 349-351) (79): 689–693
- [21] H.Zejli, F.Margnat, J.P.Petit : The Janus Cosmological Model, Mathematically and Physically Consistent. <https://hal.science/hal-04583560>. Jan. 2024
- [22] H.Zejli, F.Margnat, J.P.Petit : The Legacy of Andrei Sakharov. <https://hal.science/hal-04572588> may 2024
- [23] H.Zejli, F.Margnat, J.P.Petit : Challenging the Standard Model. <https://hal.science/hal-04589263> 2024
- [24] H.Zejli, F.Margnat, J.P.Petit : Plugstars, Alternative to Black Holes. 2024 <https://hal-science/hal-04606255>
- [25] H.Zejli, F.Margnat, J.P.Petit : About the Foundations of Black Holes Theory/ <https://hal-science/hal-04637824>
- [26] C.Jonas, J.L. Lehnert, J. Quintin. Use of complex metrics in cosmology. *Journal of High Energy Physics*. 2022. Vol. 22 n° 284
- [27] Edward Witten : A Note on Complex Spacetime Metrics.; arXiv :2111.06514v2 : 11 Feb. 2022
- [28] J.L.Lehnert. Allowable complex metrics in minisuperspace quantum cosmology. *Phys. Rev. D* , 105, 026022, 25 january 2022.

