Ceci est le document composé par Gilles d'Agostini en 2016, qu'il avait adresé à Hicham Zejli. En me disant qu'il était l'auteur de cette avancée importante, débouchant sur une loi de vitesse de rotation des galaxies en accord avec les observations, Hicham s'est contenté de reproduire ce travail, équation par équation, dans son livre. Ayant oublié l'existence de ce travail de Gilles, vieux de 8 ans j'avais créé un article où il était mentionné quHicham était l'auteur de cette importante avancée. Article en cours de publication ! Il en restera cosignataire. Je n'ai pu que faire rajouter le nom de d'Agostini.

Gilles d'Agostini dagostini.gilles@laposte.net

Etat au 29 février 2016

Solution elliptique de l'équation de Vlasov

En rouge les numéros des équations copiées par H.Zejli

Introduction

Equation de Vlasov

L'équation de Vlasov générale s'écrit :

$$\frac{Df}{Dt}+\overline{\mathbf{V}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+\left(\overline{\mathbf{F}}-\overline{\frac{D\mathbf{c}_0}{Dt}}\right).\frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}}-\left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}}\mathbf{V}\right]:\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]=0 \qquad (4.2.8)$$

avec la notation $\frac{D}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\overline{\mathbf{c}_0}.\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$

L'équation de Vlasov exprimée en fonction de la vitesse d'agitation **C** et de la vitesse moyenne $\mathbf{c_0}$ (et non pas de la vitesse absolue $\mathbf{V}=\mathbf{c_0}+\mathbf{C}$), s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \log f}{\partial t}+\overline{\mathbf{C}}.\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{r}}+\overline{\mathbf{c}_0}.\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{r}}+\left(\overline{\mathbf{F}}-\overline{\frac{D\mathbf{c}_0}{Dt}}\right).\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}}-\left[\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{C}\right]:\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]=0} \qquad (4.2.10)$$

les pages du livre de H.Zejli en fin de de document

Principe pour la recherche des solutions

Le principe est le suivant :

(1) on prend une distribution f fonction des vitesses et du temps,

(2) on la substitue dans l'équation de Vlassov,

(3) on regroupe les termes en fonction des monômes des composantes de la vitesse ce qui donne autant d'équations individuelles

Recherche d'une solution

Objectif : distribution elliptique

On choisit une distribution où les vitesses forment un ellipsoïde :

$$Log\ f = Log\ B + a_R C_R^2 + a_q C_q^2 + a_p C_p^2$$ (4.3.1)

Où C_R est la composante sur la direction **r**, C_P, la projection sur une direction perpendiculaire à **r** et à l'axe **z** (on prend cet axe car on va travailler sur des galaxies qui tournent autour de **z**).

Expression que l'on réécrit sous la forme suivante :

$$\boxed{Log\ f = Log\ B - \frac{m}{2k\,H}\mathbf{C}^2 + a\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)^2 + \alpha\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right]^2}$$ (4.3.2)

Où **k** est le vecteur unitaire selon **z**, B, H, a et α peuvent dépendre à priori du temps et de l'espace.

Hypothèses

On va pour la suite faire les hypothèses suivantes :

(1) on se place en stationnaire : il n'y a pas de dépendance implicite en fonction du temps
(2) on va considérer une solution symétrique autour de l'axe z, rotation autour de l'axe z avec une vitesse moyenne qui est tangentielle

avec ces hypothèses, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$ (4.3.3)

$$\frac{D\mathbf{c}_0}{Dt} \equiv \cancel{\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial t}} + \overline{\mathbf{c}_0}.\left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right] = \overline{\mathbf{c}_0}.\left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right]$$ (4.3.4)

$$\overline{\mathbf{c}_0}.\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{r}} = 0$$ (4.3.5)

$$\mathbf{c}_0 = \omega(\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{r}) = \omega\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculs et expressions utiles pour la suite

$$\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \log B}{\partial \mathbf{r}} - \frac{m}{2k}\mathbf{C}^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(\frac{1}{H}\right) + 2a\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)\mathbf{C} + 2\alpha\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right](\mathbf{C}\times\mathbf{k})$$
$$+ \frac{\partial a}{\partial \mathbf{r}}\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{r}}\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right]^2$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{m}{kH}\mathbf{C} + 2a\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)\mathbf{r} + 2\alpha\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right](\mathbf{k}\times\mathbf{r})$$

$$(\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = -yC_x + xC_y \qquad (4.3.11)$$

$$\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right](\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} y^2 C_x - xyC_y \\ -xyC_x + x^2 C_y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4.3.12)$$

Equation de Vlasov à utiliser

L'équation utile se réduit à :

$$\boxed{\overline{\mathbf{C}}.\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{r}} + \left(\overline{\mathbf{F}} - \overline{\mathbf{c}_0\left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right]}\right).\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} - \left[\!\left[\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{C}\right]\!\right]:\left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right] = 0} \qquad (4.3.6)$$

Elle comporte 3 termes :

(T1) : $\overline{\mathbf{C}}.\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{r}}$ va donner des termes en vitesse d'ordre 1 et d'ordre 3

(T2) : $\left(\overline{\mathbf{F}} - \overline{\mathbf{c}_0\left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right]}\right).\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}}$ va donner des termes en vitesse d'ordre 1

(T3) : $-\left[\!\left[\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{C}\right]\!\right]:\left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right]$ va donner des termes en vitesse d'ordre 2

Termes en vitesse d'ordre 3

Il faut exprimer $\overline{\mathbf{C}}.\dfrac{\partial \log f}{\partial \mathbf{r}}$ et ne garder que les termes d'ordre 3 :

$$-\frac{m}{2k}\mathbf{C}^2\overline{\mathbf{C}}.\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(\frac{1}{H}\right) + 2a\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{C} + \cancel{2\alpha\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right]\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{C}\times\mathbf{k})} \qquad (4.3.13)$$
$$+\overline{\mathbf{C}}.\frac{\partial a}{\partial \mathbf{r}}\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)^2 + \overline{\mathbf{C}}.\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{r}}\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right]^2 = 0$$

On va exprimer les composantes et regrouper ensuite les monomes

$$\begin{aligned}
&-\frac{m}{2k}\left(C_x^2+C_y^2+C_z^2\right)\left(C_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right)+C_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right)+C_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right)\right)\\
&+2a\left(C_x^2+C_y^2+C_z^2\right)\left(xC_x+yC_y+zC_z\right) \qquad (4.3.14)\\
&+\left(C_x\frac{\partial a}{\partial x}+C_y\frac{\partial a}{\partial y}+C_z\frac{\partial a}{\partial z}\right)\left(xC_x+yC_y+zC_z\right)^2\\
&+\left(C_x\frac{\partial \alpha}{\partial x}+C_y\frac{\partial \alpha}{\partial y}+C_z\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)\left(-yC_x+xC_y\right)^2 \qquad =0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{m}{2k}\left(C_x^2+C_y^2+C_z^2\right)\left(C_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right)+C_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right)+C_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right)\right)\\
&+2a\left(C_x^2+C_y^2+C_z^2\right)\left(xC_x+yC_y+zC_z\right)\\
&+\left(C_x\frac{\partial a}{\partial x}+C_y\frac{\partial a}{\partial y}+C_z\frac{\partial a}{\partial z}\right)\left(x^2C_x^2+y^2C_y^2+z^2C_z^2+2xyC_xC_y+2xzC_xC_z+2yzC_yC_z\right)\\
&+\left(C_x\frac{\partial \alpha}{\partial x}+C_y\frac{\partial \alpha}{\partial y}+C_z\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)\left(y^2C_x^2+x^2C_y^2-2xyC_xC_y\right) \qquad =0
\end{aligned}$$

Soit 45 termes que l'on regroupe par monome :

$$C_x^3 : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right)+2ax+x^2\frac{\partial a}{\partial x}+y^2\frac{\partial \alpha}{\partial x}=0 \qquad (4.3.15)$$
$$C_y^3 : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right)+2ay+y^2\frac{\partial a}{\partial y}+x^2\frac{\partial \alpha}{\partial y}=0 \qquad (4.3.16)$$
$$C_z^3 : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right)+2az+z^2\frac{\partial a}{\partial z}=0 \qquad (4.3.17)$$

$$C_x^2C_y : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right)+2ay+x^2\frac{\partial a}{\partial y}+2xy\frac{\partial a}{\partial x}+y^2\frac{\partial \alpha}{\partial y}-2xy\frac{\partial \alpha}{\partial x}=0 \qquad (4.3.18)$$
$$C_y^2C_x : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right)+2ax+y^2\frac{\partial a}{\partial x}+2xy\frac{\partial a}{\partial y}+x^2\frac{\partial \alpha}{\partial x}-2xy\frac{\partial \alpha}{\partial y}=0 \qquad (4.3.19)$$
$$C_x^2C_z : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right)+2az+x^2\frac{\partial a}{\partial z}+2xz\frac{\partial a}{\partial x}+y^2\frac{\partial \alpha}{\partial z}=0 \qquad (4.3.20)$$
$$C_y^2C_z : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right)+2az+y^2\frac{\partial a}{\partial z}+2yz\frac{\partial a}{\partial y}+x^2\frac{\partial \alpha}{\partial z}=0 \qquad (4.3.21)$$

$$C_z^2\,C_x: -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right)+2ax+z^2\frac{\partial a}{\partial x}+2xz\frac{\partial a}{\partial z}=0 \qquad (4.3.22)$$

$$C_z^2\,C_y: -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right)+2ay+z^2\frac{\partial a}{\partial y}+2yz\frac{\partial a}{\partial z}=0 \qquad (4.3.23)$$

$$C_x\,C_yC_z:\ 2yz\frac{\partial a}{\partial x}+2xz\frac{\partial a}{\partial y}+2xy\frac{\partial a}{\partial z}-2xy\frac{\partial \alpha}{\partial z}=0 \qquad (4.3.24)$$

On ne retombe par sur les 10 équations de la thèse de JPP (les équations en U^2V et UV^2, on se convainc rapidement que les termes ne s'annulent pas 2 à 2 car il les différences de signes sont peu nombreuses, il y a sans doute eu une annulation malencontreuse entre les termes en a et α), sauf si l'on fait tout de suite l'hypothèse que a et α ne dépendent pas de **r**.
On obtient alors :

$$C_x^3\equiv C_z^2\,C_x\equiv C_y^2\,C_x: -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right)+2ax=0 \qquad (4.3.25)$$

$$C_y^3\equiv C_x^2\,C_y\equiv C_z^2\,C_y: -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right)+2ay=0 \qquad (4.3.26)$$

$$C_z^3\equiv C_x^2\,C_z\equiv C_y^2\,C_z: -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right)+2az=0 \qquad (4.3.27)$$

$$C_x\,C_yC_z:\ 0=0$$

Faisons apparaître ρ^2

$$C_x^3\equiv C_z^2\,C_x\equiv C_y^2\,C_x: -\cancel{2x}\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right)+\cancel{2x}\,a=0 \qquad (4.3.29)$$

$$C_y^3\equiv C_x^2\,C_y\equiv C_z^2\,C_y: -\cancel{2y}\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right)+\cancel{2y}\,a=0 \qquad (4.3.30)$$

$$C_z^3\equiv C_x^2\,C_z\equiv C_y^2\,C_z: -\cancel{2z}\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right)+\cancel{2z}\,a=0 \qquad (4.3.31)$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right)=\frac{2k}{m}a \quad\Rightarrow\frac{1}{H}=\frac{2k}{m}a\rho^2+cte(z^2) \qquad (4.3.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right)=\frac{2k}{m}a \quad\Rightarrow\frac{1}{H}=\frac{2k}{m}az^2+cte(\rho^2) \qquad (4.3.33)$$

La solution cohérente avec l'ensemble des 2 équations, s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{H}=\frac{1}{T_0}\left(1+\frac{2kaT_0}{m}\boldsymbol{r}^2\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{m}{kH}=\frac{m}{kT_0}+2ar^2 \qquad (4.3.37)$$

En posant :

$$r_0^2=\frac{m}{2akT_0} \quad \Rightarrow \quad H=\frac{T_0}{1+\dfrac{r^2}{r_0^2}} \qquad (4.3.38)$$

Si l'on revient à f :

$$Log\ f = Log\ B + a_R\, C_R^2 + a_p\, C_p^2 + a_q\, C_q^2 \equiv Log\ B - \frac{m}{2k\,H}\mathbf{C}^2 + a\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)^2 + \alpha\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right]^2 \quad (4\text{-}3.43)$$

En tenant compte du fait que :

$$\left\|(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right\|^2 = (\mathbf{k}\times\mathbf{r})\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}) = \mathbf{r}^2 - z^2 = \boldsymbol{\rho}^2$$

On obtient :

$$a_R = -\frac{m}{2k\,H} + a\mathbf{r}^2 \qquad a_P = -\frac{m}{2k\,H} + \alpha\boldsymbol{\rho}^2 \qquad a_Q = -\frac{m}{2k\,H} \quad 4.3.46$$

En posant : $\rho_0^2 = \dfrac{m}{2\alpha k T_0}$ (4.3.47)

$$a_R = -\frac{m}{2kT_0}\ (4.3.48) \qquad a_P = -\frac{m}{2kT_0}\left(1+\frac{\mathbf{r}^2}{r_0^2}-\frac{\boldsymbol{\rho}^2}{\rho_0^2}\right)\ (4.3.49) \qquad a_Q = -\frac{m}{2kT_0}\left(1+\frac{\mathbf{r}^2}{r_0^2}\right)\ (4\text{-}3.50)$$

$$f = f_0 \exp\left(-\frac{m}{2kT_0}\left[C_R^2 + C_P^2\left(1+\frac{\mathbf{r}^2}{r_0^2}-\frac{\boldsymbol{\rho}^2}{\rho_0^2}\right) + C_Q^2\left(1+\frac{\mathbf{r}^2}{r_0^2}\right)\right]\right) \quad (4.3.51)$$

Le normalisation f_0 s'obtient par la somme sur tout l'ensemble des vitesses.

$$f_0 = n\left(\frac{m}{2\pi k T_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{\mathbf{r}^2}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\mathbf{r}^2}{r_0^2}-\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.52)$$

Termes en vitesse d'ordre 2

Il faut expliciter : $\left[\!\left[\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{C}\right]\!\right] : \left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right]$

Le double produit de 2 dyadiques est égal à la trace du produit des matrices correspondantes aux dyadique.

$$\left[\!\left[\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{C}\right]\!\right] : \left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right] = Tr(AB)$$

Avec (4.3.53)

$$A = \left[\!\left[\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{C}\right]\!\right] \qquad \text{et} \qquad B = \left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right] \qquad (4.3.54)$$

$$\mathbf{c}_0 = \omega\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B = \left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{c}_{0x}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{c}_{0y}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{c}_{0x}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{c}_{0y}}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{c}_{0x}}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{c}_{0y}}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\frac{\partial \omega}{\partial x} & x\frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega & 0 \\ -y\frac{\partial \omega}{\partial y} - \omega & x\frac{\partial \omega}{\partial y} & 0 \\ -y\frac{\partial \omega}{\partial z} & x\frac{\partial \omega}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.3.54)$$

Calculons A :

$$A = \left[\!\left[\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{C}\right]\!\right] \qquad (4.3.55)$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}}\overline{\mathbf{C}} = -\frac{m}{kH}\mathbf{C}\overline{\mathbf{C}} + 2a\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)\mathbf{r}\overline{\mathbf{C}} + 2\alpha\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right](\mathbf{k}\times\mathbf{r})\overline{\mathbf{C}} \qquad (4.3.56)$$

$$\equiv A = A1 + A2 + A3$$

$$A1 = -\frac{m}{kH}\begin{pmatrix} C_x^2 & C_xC_y & C_xC_z \\ C_yC_x & C_y^2 & C_yC_z \\ C_zC_x & C_zC_y & C_z^2 \end{pmatrix} \qquad (4.3.58)$$

$$A2 = 2a\left(xC_x + yC_y + zC_z\right)\begin{pmatrix} xC_x & xC_y & xC_z \\ yC_x & yC_y & yC_z \\ zC_x & zC_y & zC_z \end{pmatrix} \qquad (4.3.59)$$

$$A3 = 2\,\alpha \begin{pmatrix} y^2 C_x - xy\, C_y \\ -xy\, C_x + x^2 C_y \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_x, & C_y, & C_z \end{pmatrix}$$ (4.3.60)

$$= 2\,\alpha \begin{pmatrix} y^2 C_x C_x - xy\, C_y C_x & y^2 C_x C_y - xy\, C_y C_y & y^2 C_x C_z - xy\, C_y C_z \\ -xy\, C_x C_x + x^2 C_y C_x & -xy\, C_x C_y + x^2 C_y C_y & -xy\, C_x C_z + x^2 C_y C_z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (4.3.61)

$$A = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix}$$ (4.3.62)

$$AB = \begin{pmatrix} A_{xx}B_{xx} + A_{xy}B_{yx} + A_{xz}B_{zx} & \ldots & \ldots \\ \ldots & A_{yx}B_{xy} + A_{yy}B_{yy} + A_{yz}B_{zx} & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Il faut calculer :

$$Tr(AB) = Axx\,Bxx + Axy\,Byx + Axz\,Bzx + Ayx\,Bxy + Ayy\,Byy + Ayz\,Bzy + 0$$ (4.3.63)

$$A_{xx} = -\frac{m}{kH} C_x^2 + 2a\left(x\,x C_x^2 + yx\, C_x C_y + xz\, C_x C_z\right) + 2\alpha\left(y^2 C_x^2 - xy\, C_y C_x\right)$$ (4.3.64)

$$= C_x^2\left(-\frac{m}{kH} + 2a x^2 + 2\alpha y^2\right) + C_x C_y 2(a-\alpha) x y + C_x C_z\, 2a x z$$ (4.3.65)

$$A_{yy} = -\frac{m}{kH} C_y^2 + 2a\left(x C_x y C_y + y C_y y C_y + z C_z y C_y\right) + 2\alpha\left(-xy\, C_x C_y + x^2 C_y C_y\right)$$ (4.3.66)

$$= C_y^2\left(-\frac{m}{kH} + 2a y^2 + 2\alpha x^2\right) + C_x C_y 2(a-\alpha) x y + C_y C_z\, 2a y z$$ (4.3.67)

$$A_{xy} = -\frac{m}{kH} C_x C_y + 2a\left(x C_x x C_y + y C_y x C_y + z C_z x C_y\right) + 2\alpha\left(y^2 C_x C_y - xy\, C_y C_y\right)$$ (4.3.68)

$$= C_x C_y\left(-\frac{m}{kH} + 2a x^2 + 2\alpha y^2\right) + C_y^2 2(a-\alpha) x y + C_y C_z\, 2a x z$$ (4.3.69)

$$A_{yx} = -\frac{m}{kH} C_y C_x + 2a\left(x C_x y C_x + y C_y y C_x + z C_z y C_x\right) + 2\alpha\left(-xy\, C_x C_x + x^2 C_y C_x\right)$$ (4.3.70)

$$= C_x^2 2(a-\alpha) x y + C_x C_y\left(-\frac{m}{kH} + 2a y^2 + 2\alpha x^2\right) + C_x C_z\, 2a y z$$ (4.3.71)

$$A_{xz} = -\frac{m}{kH} C_x C_z + 2a\left(x C_x x C_z + y C_y x C_z + z C_z x C_z\right) + 2\alpha\left(y^2 C_x C_z - xy\, C_y C_z\right)$$ (4-3.72)

$$= C_z^2 2a x z + C_x C_z\left(-\frac{m}{kH} + 2a x^2 + 2\alpha y^2\right) + C_y C_z\, 2(a-\alpha) x y$$ (4-3-73)

$$A_{yz} = -\frac{m}{kH} C_y C_z + 2a\left(x C_x y C_z + y C_y y C_z + z C_z y C_z\right) + 2\alpha\left(-xy C_x C_z + x^2 C_y C_z\right)$$ 4.3.74)

$$= C_z^2 2a\,y\,z + C_x C_z\, 2(a-\alpha)\,x\,y + C_y C_z\left(-\frac{m}{kH} + 2a\,y^2 + 2\alpha\,x^2\right)$$ (4.3.75)

Terme en C_x^2. Ils proviennent de Axx Bxx et Ayx Bxy idem

$$\left(-\frac{m}{kH} + 2a\,x^2 + 2\alpha\,y^2\right)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) + 2(a-\alpha)\,x\,y\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x} + \omega\right) = 0$$ (4.3.77)

Terme en C_y^2. Ils proviennent de Axy Byx et Ayy Byy idem

$$\left(-\frac{m}{kH} + 2a\,y^2 + 2\alpha\,x^2\right)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) + 2(a-\alpha)\,x\,y\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial y} - \omega\right) = 0$$ (4.3.78)

Terme en C_z^2. Ils proviennent de Axz Bzx et Ayz Bzy idem

$$2a\,x\,z\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) + 2a\,y\,z\left(x\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) = 0$$ (4.3.79)

Terme en $C_x C_y$. Ils proviennent de Axy Byx, AxxBxx, AyxBxy et Ayy Byy idem

$$\left(-\frac{m}{kH} + 2a\,x^2 + 2\alpha\,y^2\right)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial y} - \omega\right) + 2(a-\alpha)\,x\,y\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)$$ (4.3.80)

$$+\left(-\frac{m}{kH} + 2a\,y^2 + 2\alpha\,x^2\right)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x} + \omega\right) + 2(a-\alpha)\,x\,y\left(x\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) = 0$$ (4.381)

Terme en $C_x C_z$. Ils proviennent de Axx Bxx, AxzBzx, AyxBxy et Ayz Bzy idem

$$(2a\,x\,z)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) + \left(-\frac{m}{kH} + 2a\,x^2 + 2\alpha\,y^2\right)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)$$ (4,3,82)

$$+(2a\,x\,y)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x} + \omega\right) + 2(a-\alpha)\,x\,y\left(x\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) = 0$$ (4.3.83)

Terme en $C_y C_z$. Ils proviennent de Axy Byx, AxzBzx, AyyByy et Ayz Bzy idem

$$(2a\,x\,z)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial y} - \omega\right) + 2(a-\alpha)\,x\,y\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)$$ (4.3.84)

$$+(2a\,y\,z)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) + \left(-\frac{m}{kH} + 2a\,y^2 + 2\alpha\,x^2\right)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) = 0$$ (4.3.85)

On va utiliser le fait que ne dépend que de ρ^2 et z^2 et donc : idem

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\frac{\partial\rho^2}{\partial x}=2x\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2} \quad (4.3.86)$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\frac{\partial\rho^2}{\partial y}=2y\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2} \quad (4.3.87)$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\frac{\partial z^2}{\partial z}=2z\frac{\partial\omega}{\partial z^2} \quad (4.3.88)$$

L'équation en C_x^2 devient : idem

$$\left(-\frac{m}{kH}+2ax^2+2\alpha y^2\right)\cancel{2yx}\left(-\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\right)+\cancel{2xy}\,(a-\alpha)\left(2x^2\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}+\omega\right)=0$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\left(\frac{m}{kH}\cancel{-2ax^2}-2\alpha y^2\cancel{+2ax^2}-2\alpha x^2\right)+(a-\alpha)\omega=0$$
$$\frac{\partial Log\omega}{\partial\rho^2}=-\frac{(a-\alpha)}{\left(\frac{m}{kH}-2\alpha\rho^2\right)} \quad (4.3.89)$$

En se plaçant dans e cadre de la solution particulière (a et a constant dans l'espace) : idem

$$\frac{m}{kH}=\frac{m}{kT_0}+2ar^2$$

L'équation devient :

$$\frac{\partial Log\omega}{\partial\rho^2}=-\frac{1}{2}\frac{2(a-\alpha)}{\left(\frac{m}{kT_0}+2(a-\alpha)\rho^2+2az^2\right)}=-\frac{1}{2}\frac{\partial Log\left(\frac{m}{kT_0}+2(a-\alpha)\rho^2+2az^2\right)}{\partial\rho^2} \quad (4.3.90) \text{ et } (4.3.91)$$

La solution s'écrit sous la forme :

D'où

$$\boxed{\omega=\frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{m}{kT_0}+2(a-\alpha)\rho^2+2az^2}}} \quad (4.3.92)$$

angular velocity

vitesse angulaire rotation

Vérifions si les autres équations sont compatibles.
L'équation en C_y^2 devient :

$$\left(-\frac{m}{kH}+2ay^2+2\alpha x^2\right)\left(\cancel{2xy}\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\right)+\cancel{2xy}\,(a-\alpha)\left(-2y^2\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}-\omega\right)=0$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\left(-\frac{m}{kH}+\cancel{2ay^2}+2\alpha x^2\cancel{-2ay^2}+2\alpha y^2\right)-(a-\alpha)\omega=0 \text{ c'est la même}$$

$\mathbf{C}$ le long de cet axe.

Extrait du livre d'Hicham Zejli :
«MODELE COSMOLOGIQUE JANUS»

Dans le cadre d'une distribution de vitesse ellipsoïdale, 4.3.1 peut également s'écrire sous la forme suivante :

point de départ :

$$\ln(f) = \ln(B) - \frac{m}{2kH}\mathbf{C}^2 + a(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r})^2 + \alpha[\mathbf{C}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{r})]^2 \tag{4.3.2}$$

(JP PETIT 1972, Compte rendu à l'Académie des Sciences Paris)

où :

- $\mathbf{k}$ est le vecteur unitaire selon $\overrightarrow{OZ}$ autour duquel la galaxie tourne [10]
- $\mathbf{R}$ est le vecteur unitaire selon l'axe radial colinéaire à $\mathbf{r}$ donné par la relation suivante : $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$
- $\mathbf{P}$ est le vecteur unitaire dans la direction perpendiculaire à $\mathbf{r}$ et à l'axe Z donné par la relation suivante : $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{R}}{\|\mathbf{k}\times\mathbf{R}\|}$ [11]
- $\mathbf{Q}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire aux deux vecteurs précédents donné par la relation suivante : $\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{P}\times\mathbf{R}}{\|\mathbf{P}\times\mathbf{R}\|}$
- B, H, a et α dépendent à priori du temps et de l'espace.

Or, nous pouvons poser les hypothèses suivantes :

1. Nous nous placerons en régime stationnaire, ce qui signifie qu'il n'y a pas de dépendance implicite par rapport au temps.
2. Nous considérerons une solution présentant une symétrie autour de l'axe $\overrightarrow{OZ}$, caractérisée par une rotation autour de cet axe avec une vitesse moyenne tangentielle.

Ce qui se traduit par les simplifications suivantes :

$$\frac{\partial \ln(f)}{\partial t} = 0 \tag{4.3.3}$$

$$\frac{D\mathbf{c}_o}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial t} + \mathbf{c}_o \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{c}_o \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}} \tag{4.3.4}$$

$$\mathbf{c}_o \cdot \frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{r}} = 0 \tag{4.3.5}$$

Les équations de Vlasov 4.2.9 et 4.2.10 se réduisent alors aux expressions suivantes :

$$\mathbf{C}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\ln(f) - \left(\nabla_{\mathbf{r}}\Psi + \mathbf{c}_o\cdot\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}}\right)\cdot\nabla_{\mathbf{C}}\ln(f) - \nabla_{\mathbf{C}}\ln(f)\cdot\mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{r}}\mathbf{c}_o = 0 \tag{4.3.6}$$

$$\underline{\mathbf{C}}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\underline{\ln(f)} - \left(\nabla_{\mathbf{r}}\Psi + \underline{\mathbf{c}}_o\cdot\frac{\partial \underline{\mathbf{c}}_o}{\partial \mathbf{r}}\right)\cdot\nabla_{\underline{\mathbf{C}}}\underline{\ln(f)} - \nabla_{\underline{\mathbf{C}}}\underline{\ln(f)}\cdot\underline{\mathbf{C}} : \nabla_{\mathbf{r}}\underline{\mathbf{c}}_o = 0 \tag{4.3.7}$$

10. Vecteur unitaire $\mathbf{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ suivant l'axe Z dans le repère (X, Y, Z).

11. Le produit vectoriel génère un vecteur orthogonal par rapport à deux vecteurs donnés. Ensuite, la normalisation de ce vecteur résultant est réalisée en le divisant par sa propre norme.

4.3.1 Tentatives de Développement de Solutions pour la Première Équation de Vlasov

Essayons d'établir une solution de équation de Vlasov 4.3.6. En effet, cette expression comporte trois termes. Le premier donné par $\mathbf{C}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\ln(f)$ va donner des solutions de vitesse d'ordre trois et un. Le second $\left(\nabla_{\mathbf{r}}\Psi + \mathbf{c}_o \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}}\right)\cdot\nabla_{\mathbf{C}}\ln(f)$ nous permettra d'obtenir des solutions de vitesse d'ordre un et le dernier $\nabla_{\mathbf{C}}\ln(f)\cdot\mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{r}}\mathbf{c}_o$ d'ordre deux.

Solution d'ordre 3 pour la fonction de distribution elliptique des vitesses

Le premier terme de l'équation de Vlasov 4.3.6 doit satisfaire la relation suivante :

$$\mathbf{C}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\ln(f) = 0 \tag{4.3.8}$$

Or, pour simplifier davantage les calculs, nous pouvons poser :

$$\mathbf{c}_o = \omega(\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = \omega\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix} \tag{4.3.9}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = \omega\frac{\partial(\mathbf{k}\times\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \tag{4.3.10}$$

Soit :

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = -yC_x + xC_y \tag{4.3.11}$$

$$[\mathbf{C}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{r})](\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} y^2C_x - xyC_y\\ -xyC_x + x^2C_y\\ 0\end{pmatrix} \tag{4.3.12}$$

Ainsi, l'introduction de l'équation 4.3.2 dans 4.3.8 nous permet d'obtenir la relation suivante, en ne conservant que les termes d'ordre trois :

$$-\frac{m}{2k}\mathbf{C}^2\mathbf{C}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\frac{1}{H}\right)+2a(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r})\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{C}\cdot\frac{\partial a}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r})^2+\mathbf{C}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{r}}[\mathbf{C}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{r})]^2 = 0 \tag{4.3.13}$$

Nous pouvons l'exprimer en fonction des composantes C_x, C_y, C_z de la vitesse résiduelle, colinéaires au trièdre formé par les axes $(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z})$, afin de profiter de la symétrie autour de l'axe $\overrightarrow{OZ}$ et de regrouper ensuite les monômes :

$$\begin{aligned}
&-\frac{m}{2k}\left(C_x^2+C_y^2+C_z^2\right)\left(C_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right)+C_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right)+C_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right)\right)\\
&+2a\left(C_x^2+C_y^2+C_z^2\right)\left(xC_x+yC_y+zC_z\right)\\
&+\left(C_x\frac{\partial a}{\partial x}+C_y\frac{\partial a}{\partial y}+C_z\frac{\partial a}{\partial z}\right)\left(xC_x+yC_y+zC_z\right)^2\\
&+\left(C_x\frac{\partial \alpha}{\partial x}+C_y\frac{\partial \alpha}{\partial y}+C_z\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)\left(-yC_x+xC_y\right)^2=0
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Nous obtenons ainsi 45 termes qui, regroupées par monômes, permettent de déduire les dix équations aux dérivées partielles suivantes :

$$C_x^3 : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ax + x^2\frac{\partial a}{\partial x} + y^2\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \tag{4.3.15}$$

$$C_y^3 : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ay + y^2\frac{\partial a}{\partial y} + x^2\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \tag{4.3.16}$$

$$C_z^3 : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) + 2az + z^2\frac{\partial a}{\partial z} = 0 \tag{4.3.17}$$

$$C_x^2C_y : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ay + x^2\frac{\partial a}{\partial y} + 2xy\frac{\partial a}{\partial x} + y^2\frac{\partial \alpha}{\partial y} - 2xy\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \tag{4.3.18}$$

$$C_y^2C_x : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ax + y^2\frac{\partial a}{\partial x} + 2xy\frac{\partial a}{\partial y} + x^2\frac{\partial \alpha}{\partial x} - 2xy\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \tag{4.3.19}$$

$$C_x^2C_z : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) + 2az + x^2\frac{\partial a}{\partial z} + 2xz\frac{\partial a}{\partial x} + y^2\frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0 \tag{4.3.20}$$

$$C_y^2C_z : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) + 2az + y^2\frac{\partial a}{\partial z} + 2yz\frac{\partial a}{\partial y} + x^2\frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0 \tag{4.3.21}$$

$$C_z^2C_x : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ax + z^2\frac{\partial a}{\partial x} + 2xz\frac{\partial a}{\partial z} = 0 \tag{4.3.22}$$

$$C_z^2C_y : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ay + z^2\frac{\partial a}{\partial y} + 2yz\frac{\partial a}{\partial z} = 0 \tag{4.3.23}$$

$$C_xC_yC_z : 2yz\frac{\partial a}{\partial x} + 2xz\frac{\partial a}{\partial y} + 2xy\frac{\partial a}{\partial z} - 2xy\frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0 \tag{4.3.24}$$

En faisant l'hypothèse que a et α ne dépendent pas de r, nous obtenons :

$$C_x^3 \equiv C_z^2C_x \equiv C_y^2C_x : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ax = 0 \tag{4.3.25}$$

$$C_y^3 \equiv C_x^2C_y \equiv C_z^2C_y : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ay = 0 \tag{4.3.26}$$

$$C_z^3 \equiv C_x^2C_z \equiv C_y^2C_z : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) + 2az = 0 \tag{4.3.27}$$

Or, nous savons que le rayon de l'ellipsoïde sur son plan de rotation défini selon le repère (X, Y) autour de l'axe Z est donné par [12] :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \implies \begin{cases} \dfrac{\partial \rho^2}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial \rho^2}{\partial y} = 2y \end{cases} \tag{4.3.28}$$

12. En sachant que $r^2 = \rho^2 + z^2$ avec $\rho^2 = x^2 + y^2$

Nous obtenons alors en fonction de ρ :

$$C_x^3 \equiv C_z^2 C_x \equiv C_y^2 C_x : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right) + a = 0 \tag{4.3.29}$$

$$C_y^3 \equiv C_x^2 C_y \equiv C_z^2 C_y : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right) + a = 0 \tag{4.3.30}$$

$$C_z^3 \equiv C_x^2 C_z \equiv C_y^2 C_z : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right) + a = 0 \tag{4.3.31}$$

Soit après intégration :

$$\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{2k}{m}a \Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{2k}{m}a\rho^2 + f_1(z^2) \tag{4.3.32}$$

$$\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{2k}{m}a \Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{2k}{m}az^2 + f_2(\rho^2) \tag{4.3.33}$$

La fonction f_1 ne dépend que de z^2, donc si on dérive (4.3.32) par rapport à z^2, nous obtenons 4.3.33, soit :

$$\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{2k}{m}a\rho^2 + f_1(z^2)\right) = \frac{\partial}{\partial z^2}f_1(z^2) = \frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{2k}{m}a \tag{4.3.34}$$

Donc :

$$f_1(z^2) = \frac{2k}{m}az^2 + k_z \tag{4.3.35}$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{H} = \frac{2k}{m}a\rho^2 + \frac{2k}{m}az^2 + k_z \tag{4.3.36}$$

Or en se plaçant à $r = 0$ ($\rho^2 = 0$ et $z^2 = 0$), nous avons $\frac{1}{H} = k_z$ que l'on décide d'associer à $\frac{1}{T_0}$ [13].

Ainsi, la solution cohérente permettant de satisfaire ces équations s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{T_0}\left(1 + \frac{2kaT_0}{m}r^2\right) \tag{4.3.37}$$

Soit en posant :

$$r_0^2 = \frac{m}{2akT_0} \implies H = \frac{T_0}{1 + \frac{r^2}{r_0^2}} \tag{4.3.38}$$

Or, nous savons que la composante d'un vecteur quelconque $\mathbf{C}$ sur l'un des axes du repère est la projection orthogonale, qui s'obtient en effectuant le produit scalaire du vecteur $\mathbf{C}$ avec le vecteur unitaire de l'axe en question. Nous pouvons ainsi exprimer les composantes de 4.3.1 de la manière suivante :

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{C}\cdot\mathbf{R} = \mathbf{C}\cdot\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \tag{4.3.39}$$

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{C}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{C}\cdot\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{r}}{\|\mathbf{k}\times\mathbf{r}\|} = \frac{\mathbf{C}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{r})}{\|\mathbf{k}\times\mathbf{r}\|} \tag{4.3.40}$$

$$\mathbf{C}_q = \mathbf{C} - \mathbf{C}_r - \mathbf{C}_p \tag{4.3.41}$$

13. T_0 étant une fonction du temps

Et en tenant compte du fait que [14] :

$$\|\mathbf{k} \times \mathbf{r}\|^2 = (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = r^2 - z^2 = \rho^2 \quad (4.3.42)$$

Après introduction dans 4.3.1 et en regroupant les termes, nous obtenons :

$$\ln(f) = \ln(B) + \frac{(a_r - a_q)}{r^2}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{r})^2 + \frac{(a_p - a_q)}{\rho^2}[\mathbf{C} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r})]^2 + a_q \mathbf{C}^2 \quad (4.3.43)$$

Ainsi, par identification avec 4.3.2, nous pouvons en déduire que :

$$a_q = -\frac{m}{2kH} \quad (4.3.44)$$

$$a = \frac{(a_r - a_q)}{r^2} \Rightarrow a_r = -\frac{m}{2kH} + ar^2 \quad (4.3.45)$$

$$\alpha = \frac{(a_p - a_q)}{\rho^2} \Rightarrow a_p = -\frac{m}{2kH} + a\rho^2 \quad (4.3.46)$$

Si on pose également :

$$\rho_0^2 = \frac{m}{2\alpha k T_0} \quad (4.3.47)$$

Alors, nous obtenons :

$$a_r = -\frac{m}{2kT_0} \quad (4.3.48)$$

$$a_p = -\frac{m}{2kT_0}\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \quad (4.3.49)$$

$$a_q = -\frac{m}{2kT_0} + \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right) \quad (4.3.50)$$

Nous pouvons en déduire la fonction logarithmique de distribution des vitesses quadratiques :

$$f = f_0 e^{\left(-\frac{m}{2kT_0}\left[\mathbf{C}_r^2 + \mathbf{C}_p^2\left(1+\frac{r^2}{r_0^2}-\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) + \mathbf{C}_q^2\left(1+\frac{r^2}{r_0^2}\right)\right]\right)} \quad (4.3.51)$$

avec :

$$f_0 = n\left(\frac{m}{2\pi k T_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.52)$$

14. L'identité de Lagrange est une relation bien connue en mathématiques qui s'énonce comme suit :

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

où **a** et **b** sont des vecteurs.

Solution d'ordre 2 pour la détermination des vitesses angulaire et circulaire

Le dernier terme de l'équation de Vlasov 4.3.6 correspondant à $\nabla_\mathbf{C} \ln(f) \cdot \mathbf{C} : \nabla_\mathbf{r} \mathbf{c}_o$ est le double produit de deux dyadiques qui est égal à la trace du produit des matrices correspondantes devant satisfaire la relation suivante :

$$\nabla_\mathbf{C} \ln(f) \cdot \mathbf{C} : \nabla_\mathbf{r} \mathbf{c}_o = \mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) = 0 \tag{4.3.53}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \nabla_\mathbf{C} \ln(f) \cdot \mathbf{C} \\ \mathbf{B} = \nabla_\mathbf{r} \mathbf{c}_o \end{cases}$$

<u>Calculons **B** :</u>

D'après 4.3.9, nous pouvons en déduire :

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{c}_{0x}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{c}_{0y}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{c}_{0x}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{c}_{0y}}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{c}_{0x}}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{c}_{0y}}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\frac{\partial \omega}{\partial x} & x\frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega & 0 \\ -y\frac{\partial \omega}{\partial y} - \omega & x\frac{\partial \omega}{\partial y} & 0 \\ -y\frac{\partial \omega}{\partial z} & x\frac{\partial \omega}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.54}$$

<u>Calculons **A** :</u>

$$\mathbf{A} = \nabla_\mathbf{C} \ln(f) \cdot \mathbf{C} \tag{4.3.55}$$

D'après 4.3.2, nous pouvons en déduire :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\frac{m}{kH}\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} + 2a(\mathbf{C} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{C} + 2\alpha[\mathbf{C} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r})] \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{C} & (4.3.56) \\ &= \mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} + \mathbf{A_3} & (4.3.57) \end{aligned}$$

Calculons chaque terme :

$$\mathbf{A_1} = -\frac{m}{kH} \begin{pmatrix} C_x^2 & C_xC_y & C_xC_z \\ C_yC_x & C_y^2 & C_yC_z \\ C_zC_x & C_zC_y & C_z^2 \end{pmatrix}, \tag{4.3.58}$$

$$\mathbf{A_2} = 2a(xC_x + yC_y + zC_z) \begin{pmatrix} xC_x & xC_y & xC_z \\ yC_x & yC_y & yC_z \\ zC_x & zC_y & zC_z \end{pmatrix}, \tag{4.3.59}$$

$$\mathbf{A_3} = 2\alpha \begin{pmatrix} y^2C_x - xyC_y \\ -xyC_x + x^2C_y \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_x & C_y & C_z \end{pmatrix} \tag{4.3.60}$$

$$= 2\alpha \begin{pmatrix} y^2C_xC_x - xyC_yC_x & y^2C_xC_y - xyC_yC_y & y^2C_xC_z - xyC_yC_z \\ -xyC_xC_x + x^2C_yC_x & -xyC_xC_y + x^2C_yC_y & -xyC_xC_z + x^2C_yC_z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3.61}$$

Considérons les deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix} \tag{4.3.62}$$

La trace de leur produit matriciel est donnée par :

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) = A_{xx}B_{xx} + A_{xy}B_{yx} + A_{xz}B_{zx} + A_{yx}B_{xy} + A_{yy}B_{yy} + A_{yz}B_{zy} + 0 \tag{4.3.63}$$

Calculons chacun des termes de cette trace :

$$A_{xx} = -\frac{m}{kH}C_x^2 + 2a(x^2C_x^2 + yxC_xC_y + zxC_xC_z) + 2\alpha(y^2C_x^2 - xyC_yC_x) \tag{4.3.64}$$

$$= C_x^2\left(-\frac{m}{kH} + 2ax^2 + 2\alpha y^2\right) + C_xC_y2(a-\alpha)xy + C_xC_z2axz \tag{4.3.65}$$

$$A_{yy} = -\frac{m}{kH}C_y^2 + 2a(xC_xyC_y + yC_yyC_y + zC_zyC_y) + 2\alpha(-xyC_xC_y + x^2C_yC_y) \tag{4.3.66}$$

$$= C_y^2\left(-\frac{m}{kH} + 2ay^2 + 2\alpha x^2\right) + C_xC_y2(a-\alpha)xy + C_yC_z2ayz \tag{4.3.67}$$

$$A_{xy} = -\frac{m}{kH}C_xC_y + 2a(xC_xxC_y + yC_yxC_y + zC_zxC_y) + 2\alpha(y^2C_xC_y - xyC_yC_y) \tag{4.3.68}$$

$$= C_xC_y\left(-\frac{m}{kH} + 2ax^2 + 2\alpha y^2\right) + C_y^22(a-\alpha)xy + C_yC_z2axz \tag{4.3.69}$$

$$A_{yx} = -\frac{m}{kH}C_yC_x + 2a(xC_xyC_x + yC_yyC_x + zC_zyC_x) + 2\alpha(-xyC_xC_x + x^2C_yC_x) \tag{4.3.70}$$

$$= C_x^22(a-\alpha)xy + C_xC_y\left(-\frac{m}{kH} + 2ay^2 + 2\alpha x^2\right) + C_xC_z2ayz \tag{4.3.71}$$

$$A_{xz} = -\frac{m}{kH}C_xC_z + 2a(xC_xxC_z + yC_yxC_z + zC_zxC_z) + 2\alpha(y^2C_xC_z - xyC_yC_z) \tag{4.3.72}$$

$$= C_z^22axz + C_xC_z\left(-\frac{m}{kH} + 2ax^2 + 2\alpha y^2\right) + C_yC_z2(a-\alpha)xy \tag{4.3.73}$$

$$A_{yz} = -\frac{m}{kH}C_yC_z + 2a(xC_xyC_z + yC_yyC_z + zC_zyC_z) + 2\alpha(-xyC_xC_z + x^2C_yC_z) \tag{4.3.74}$$

$$= C_z^22ayz + C_xC_z2(a-\alpha)xy + C_yC_z\left(-\frac{m}{kH} + 2ay^2 + 2\alpha x^2\right) \tag{4.3.75}$$

$$\tag{4.3.76}$$

Les termes en C_x^2 proviennent de A_{xx} B_{xx} et A_{yx} B_{xy} :

$$\left(-\frac{m}{kH} + 2ax^2 + 2\alpha y^2\right)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) + 2(a-\alpha)xy\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x} + \omega\right) = 0 \tag{4.3.77}$$

Les termes en C_y^2 proviennent de A_{xy} B_{yx} et A_{yy} B_{yy} :

$$\left(-\frac{m}{kH} + 2ay^2 + 2\alpha x^2\right)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) + 2(a-\alpha)xy\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial y} - \omega\right) = 0 \tag{4.3.78}$$

Les termes en C_z^2 proviennent de $A_{xz}\ B_{zx}$ et $A_{yz}\ B_{zy}$:

$$2axz\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)+2ayz\left(x\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)=0 \tag{4.3.79}$$

Les termes en C_xC_y proviennent de $A_{xy}\ B_{yx}$, $A_{xx}\ B_{xx}$, $A_{yx}\ B_{xy}$ et $A_{yy}\ B_{yy}$:

$$\left(-\frac{m}{kH}+2ax^2+2\alpha y^2\right)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial y}-\omega\right)+2(a-\alpha)xy\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) \tag{4.3.80}$$

$$+\left(-\frac{m}{kH}+2ay^2+2\alpha x^2\right)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}+\omega\right)+2(a-\alpha)xy\left(x\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)=0 \tag{4.3.81}$$

Les termes en C_xC_z proviennent de $A_{xz}\ B_{zx}$, $A_{xx}\ B_{xx}$, $A_{yx}\ B_{xy}$ et $A_{yz}\ B_{zy}$:

$$(2axz)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)+\left(-\frac{m}{kH}+2ax^2+2\alpha y^2\right)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) \tag{4.3.82}$$

$$+(2axy)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}+\omega\right)+2(a-\alpha)xy\left(x\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)=0 \tag{4.3.83}$$

Les termes en C_yC_z proviennent de $A_{xy}\ B_{yx}$, $A_{xz}\ B_{zx}$, $A_{yy}\ B_{yy}$ et $A_{yz}\ B_{zy}$:

$$(2axz)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial y}-\omega\right)+2(a-\alpha)xy\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) \tag{4.3.84}$$

$$+(2ayz)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)+\left(-\frac{m}{kH}+2ay^2+2\alpha x^2\right)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)=0 \tag{4.3.85}$$

Exploitons à présent le fait que ω ne dépend que de ρ^2 et z^2 pour simplifier les expressions. Ainsi, d'après 4.3.28, nous obtenons :

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\frac{\partial\rho^2}{\partial x}=2x\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2} \tag{4.3.86}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\frac{\partial\rho^2}{\partial y}=2y\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2} \tag{4.3.87}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\frac{\partial z^2}{\partial z}=2z\frac{\partial\omega}{\partial z^2} \tag{4.3.88}$$

L'équation en C_x^2 devient :

$$\frac{\partial\ln\omega}{\partial\rho^2}=-\frac{(a-\alpha)}{\left(\frac{m}{kH}-2\alpha\rho^2\right)} \tag{4.3.89}$$

En se plaçant dans le contexte particulier où a et α sont constants dans l'espace (indépendants de r), soit à partir de 4.3.37, nous pouvons en déduire la relation suivante :

$$\frac{\partial\ln\omega}{\partial\rho^2}=-\frac{1}{2}\frac{2(a-\alpha)}{\left(\frac{m}{kT_0}+2(a-\alpha)\rho^2+2az^2\right)} \tag{4.3.90}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho^2}\left[\ln\left(\frac{m}{kT_0}+2(a-\alpha)\rho^2+2az^2\right)\right] \tag{4.3.91}$$

la loi de vitesse de rotation qu'Hicham prétendait avoir découverte

avec un palier de vitesse à grande distance du centre de la galaxie

Ainsi la solution obtenue est donnée par :

$$\omega = \frac{\omega_{\rho_0}(z^2)}{\sqrt{\frac{m}{kT_0} + 2(a-\alpha)\rho^2 + 2az^2}} \tag{4.3.92}$$

Les solutions des autres équations sont compatibles [15].

De la même manière que précédemment, l'équation en C_xC_z nous donne :

$$\frac{\partial \ln \omega}{\partial z^2} = -\frac{a}{\left(\frac{m}{kH} - 2\alpha\rho^2\right)} \tag{4.3.93}$$

En se plaçant dans le même contexte particulier où a et α sont indépendants de r, nous pouvons en déduire la vitesse angulaire de la galaxie :

$$\omega = \frac{\omega_{z_0}(\rho^2)}{\sqrt{\frac{m}{kT_0} + 2(a-\alpha)\rho^2 + 2az^2}} \tag{4.3.94}$$

Cette solution étant compatible avec le dernier terme en C_yC_z [16].

Dans le contexte de la dynamique des galaxies, si ω représente la vitesse angulaire de la galaxie [17], alors la vitesse circulaire v à un rayon ρ est donnée par :

$$\boxed{v = \rho \cdot \omega = \rho \cdot \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{m}{kT_0} + 2(a-\alpha)\rho^2 + 2az^2}} \tag{4.3.95}}$$

Ainsi nous pouvons établir une relation entre la force gravitationnelle exercée par la galaxie et la force centrifuge ressentie par un objet en orbite circulaire de la manière suivante : en fait établie par Gilles d'Agostini en 2016

collant avec les observations

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = \rho\omega^2 = \frac{\rho\omega_0^2}{\frac{m}{kT_0} + 2a\rho^2 + 2(a-\alpha)z^2} \tag{4.3.96}$$

La dérivée partielle du potentiel gravitationnel Ψ par rapport à la coordonnée radiale ρ, notée $-\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}$, représente l'accélération gravitationnelle. Pour qu'un objet maintienne une orbite circulaire, cette accélération doit être égale à la force centrifuge, qui est donnée par $\rho\omega^2$ [18].

Hicham a en fait pompé tout son calcul, équation après équation en prétendant en être l'auteur !

15. Pour les termes en C_y^2, $C_z^2 = 0$ et C_xC_y
16. $\left(\frac{m}{kH} - 2\alpha\rho^2\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\right) = -a\omega$
17. Cela est dû au fait que la vitesse circulaire est la vitesse à laquelle une étoile (ou tout autre objet) doit se déplacer le long d'un chemin circulaire pour maintenir une orbite stable autour du centre de la galaxie, en raison de la force centripète fournie par l'attraction gravitationnelle de la galaxie.
18. La contrainte sur le potentiel gravitationnel indique que pour une étoile en orbite stable, la force gravitationnelle doit exactement contrebalancer la force centrifuge à chaque rayon ρ. Cette condition est fondamentale pour la détermination de la distribution de masse dans les galaxies en utilisant les courbes de rotation observées.