

## En annexe à la vidéo Janus 27 du 6 mars 2019

Dans cette vidéo j'ai présenté le concept d'Action, en partant du principe de Fermat. Le problème, maintenant, est d'étendre cela à la Relativité Générale, ce qui sera indispensable pour suivre ce qui sera dit sur l'équation d'Einstein, les couillonnades de Damour, ses critiques concernant les identités de Bianchi, la dérivation Lagrangienne de Janus et le système d'équations de champ légèrement modifié qui va avec.

En préambule je me trouve contraint de dire quelques mots sur les tenseurs.

Ce sont des objets « invariants par changements de coordonnées ». Comme on n'appliquera ça qu'à la Relativité Générale, cela se réfère à des hypersurfaces 4D. Sur celles-ci la seule grandeur intrinsèque c'est la longueur  $s$ , mesurée le long d'une courbe quelconque tracée sur celle-ci. L'élément de longueur est donné par une forme bilinéaire qui est la métrique :

$$(1) \quad ds^2 = g_{00}(dx_0)^2 + g_{11}(dx_1)^2 + g_{22}(dx_2)^2 + g_{33}(dx_3)^2$$

On notera que j'ai mis les indices à hauteur de ligne. Ils ne sont « ni en haut », « ni en bas ». De plus je ne garde que les termes diagonaux. Je suppose les autres nuls. Je ne mets pas :

$$(2) \quad ds^2 = \sum_{\mu=0}^4 \sum_{\nu=0}^4 g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}$$

Tout simplement parce que, qu'ils s'agisse de matrice ou de tenseurs, les termes non-diagonaux seront pris invariablement égaux à zéro.

Ainsi la matrice  $g_{\mu\nu}$  s'écrit (4 lignes, 4 colonnes parce qu'on est en 4D):

$$(3) \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

Pourquoi le mot « tenseur » ? Ca vient de la résistance des matériaux, du mot « tension ».

En un point d'un matériau soumis à des contraintes on pourra définir une matrice de format (3,3), vu qu'on est en trois dimensions :

$$(4) \quad \sigma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \sigma_{01} & \sigma_{02} & \sigma_{03} \\ \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

En ce point du matériau on définit un vecteur  $d\vec{s}$ , c'est à dire un petit élément de surface, d'aire élémentaire  $ds$ , orienté dans une certaine direction.

On dira que sur cet élément de surface s'exerce une force  $\vec{df}$  et que celle-ci sera donnée par :

$$(5) \quad \vec{df} = \sigma_{\mu\nu} d\vec{s}$$

On emploiera alors l'expression « tenseur des contraintes », alors qu'à ce stade on devrait parler de « matrice des contraintes ».

Pourquoi ce mot « tenseur » ?

Imaginons qu'on fasse travailler cette force le long de  $d\vec{l}$ . On aura un travail

$$(6) \quad dW = \vec{df} \cdot d\vec{l} = (\sigma_{\mu\nu} d\vec{s}) \cdot d\vec{l}$$

Ce travail élémentaire se mesurera en watts ou en joules.

La matrice est un tableau de nombres. Mais comment chiffrer ces quantités si on décide de changer les unités de longueur et de surface ? Par exemple si on passe pour des mètres aux centimètres et des mètres carrés aux centimètres carrés. Il faudra que cela induise une transformation dans le sens inverse pour les coefficients pour qu'on retrouve la même quantité de joules dans (6).

*Cela débouchera sur le concept de covariance et de contravariance.*

On voit que si on passait des mètres aux centimètres il faudrait ajuster les coefficients de

la matrice  $\sigma_{\mu\nu}$  en les remplaçant par  $\frac{\sigma_{\mu\nu}}{1000}$  :

Imaginons que, quelque part, on ait des coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  telles que  $ds = dx_1 dx_2$  et  $dl = x_3$ . D'élément énergie est

$$(7) \quad dW = \sum \sigma_{ijk} dx_i dx_j dx_k$$

Imaginons un changement de coordonnée qui fasse jouer une « jauge d'espace a ». Alors les trois coordonnées seraient multipliées par a. Donc les éléments de la matrice seraient à diviser par  $a^3$ .

Selon les façons classique de manipuler les coordonnées, on les appelle « contravariantes ». Pourquoi ? Pourquoi pas « covariantes », mystère. Simple question de définition.

Dans ces conditions le tableau  $\sigma_{\mu\nu}$ , s'il se transforme de telle façon que les coefficients soient divisés par  $a^3$ , on dira que c'est « un tenseur « d'ordre trois », trois fois covariant ». Et dW sera qualifiée de « forme trilinéaire ».

Le « contravariant » ce sont des indices en haut. On notera donc ces coordonnées  $x^i$

Pour les objets « covariants » on met les indices en bas. Dont le tenseur s'écrirait

$$a_{ijk}$$

J'ai pris ce cas de tenseur associé à une forme trilinéaire, parce là était l'origine de ces outils. D'où ces mots de « tenseurs ».

### Au passage, quid de termes non-diagonaux pour ces contraintes.

Si on plonge une capsule manométrique dans un fluide dans un état quelconque, elle sera l'équivalent d'un élément de surface  $ds$ , orienté.

La force qui s'exerce sur la membrane ne sera pas automatiquement normale à celle-ci.

La composante normale sera qualifiée de pression et la composante tangentielle de tension visqueuse.

On écrira :  $d\vec{f} = \pi_{\mu\nu} d\vec{s}$  avec :

$$\pi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \pi_{01} & \pi_{02} & \pi_{03} \\ \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{pmatrix}$$

Etat hydrostatique de contrainte :

Ca correspond à :

$$(8) \quad p_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Alors, en un point donné du fluide (supposé en situation stationnaire) si on tourne cette capsule manométrique dans toutes les direction elle subit une force, perpendiculaire à celle-ci, d'intensité constante  $p ds$ .

S'il y a des termes non-diagonaux cela correspondra à un fluide *visqueux*. Ce fluide est en mouvement et si la membrane est disposée tangentiellement aux lignes de courant du fluide, celui-ci exercera une tensions visqueuse, tangentielle, sur celle-ci.

On rencontre, en mécanique des fluides une situation où les composantes diagonales peuvent différer, par exemple selon :

$$(9) \quad p_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} P_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & p_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & p_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P_{xx} > (p_{yy} = p_{zz})$$

Cette situation correspondra par exemple à la traversée d'une onde de choc, sur une épaisseur de quelques libres parcours moyens. C'est donc très exceptionnel.

Par contre en résistance des matériaux on aura tous les cas de figure. Ce qui s'interprétait en mécanique des fluides comme de la *viscosité* deviendra du *cisaillement*.

### Venons-en aux surfaces 2D.

En choisissant des coordonnées « contravariantes » on écrira :

$$(10) \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Tout de suite, un exemple, la métrique de la sphère ( forme bilinéaire ) :

$$(11) \quad ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

C'est à dire :

$$(12) \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Comment traduire l'invariance par changement de coordonnées ? Donnez vous une changement quelconque :

$$\theta = \theta(u^1, u^2) \quad \varphi = \varphi(u^1, u^2)$$

Vous différenciez tout cela, vous remplacez dans (12) et vous obtiendrez les nouveaux coefficients de la métrique, écrite dans ces nouvelles coordonnées, avec éventuellement des termes non diagonaux.

$$(13) \quad ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

Passons en 4D. La métrique s'exprime toujours selon la forme bilinéaire (10) mais ce sont alors des tenseurs qui s'expriment sous la forme de matrices (4,4)

Disons-le tout de suite, dans tout ce qui va suivre ces matrices seront uniquement diagonales. Quel est le sens de cette absence de termes non-diagonaux. C'est l'absence de torsion ( torsion-free). Donc pour nous une métrique de la relativité Générale cela sera, pratiquement :

$$(14) \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$(15) \quad ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + g_{33} (dx^3)^2$$

## Signature

On comprend aisément que si on effectue n'importe quel changement de variable sur ces coordonnées, les signes des termes de la diagonale ne changent pas. On appelle cette suite de signes la *signature* de la métrique.

La Relativité Restreinte et la Relativité générale se traduisent par une signature :

$$(+ - - -)$$

C'est la signature qui a été adoptée initialement par tous les relativistes, Einstein en tête ( Schwarzschild, Weyl, Adler Schiffer et Bazin, etc ). Mais, question de mode, les théoriciens optent aujourd'hui pour :

$$(- + + +)$$

Dans la relativité restreinte les termes diagonaux de la métrique valent  $\pm 1$ . Cela correspond à la métrique de l'espace de Minkowski, la métrique de Lorentz, représentée par la matrice :

$$(16) \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui peut s'écrire :

$$(17) \quad ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

$x^0$  est alors la « variable chronologique ».

## Manipulations de tenseurs.

Ici je resterai très schématique, me contentant de donner des règles.

La Relativité Générale s'écrit en utilisant des tenseurs qui s'expriment sous forme de matrices (4,4) selon leurs différentes représentations.

Le contenu en énergie-matière sera décrit à l'aide d'un tenseur **T** qui aura trois formes d'expressions matricielles différentes :

$$T_{\mu\nu} \text{ covariante}$$

$$T^{\mu\nu} \text{ contravariante}$$

$$T_{\mu}^{\nu} \text{ « mixte »}$$

Toutes ces expressions seront prises sous forme de matrices diagonales.

L'aspect géométrique sera pris en charge par le tenseur de Ricci  $\mathbf{R}$ , sous ses trois formes :

$R_{\mu\nu}$  covariante

$R^{\mu\nu}$  contravariante

$R^\nu_\mu$  « mixte »

Même chose : formes diagonales.

Le tenseur métrique aura les mêmes trois expressions :

$g_{\mu\nu}$  covariante

$g^{\mu\nu}$  contravariante

$g^\nu_\mu$  « mixte »

On a :

$$g_{\mu\mu} = \frac{1}{g^{\mu\mu}} \quad \text{et} \quad g^\mu_\mu = \delta^\mu_\mu \quad (\text{symboles de Kronecker ou matrice unité})$$

Les équations de la Relativité Générale s'écrivent sous forme tensorielle, comme :

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

$$G^{\mu\nu} = \chi T^{\mu\nu}$$

$$G^\nu_\mu = \chi T^\nu_\mu$$

En fait c'est la même égalité de tenseurs :  $\mathbf{G} = \chi \mathbf{T}$  écrite sous trois formes différentes. L'équation d'Einstein s'écrira sous ces trois formes. Pourquoi choisit-on une forme plutôt qu'une autre ? Pour des commodités de calcul. Les calculs de RG sont fastidieux et on opte sur ce qui pose le moins de soucis.

### Comment passer d'une forme à une autre ?

On montre que cela se fait en utilisant le « tenseur métrique ».

Prenons le tenseur impulsion-énergie, écrit par exemple sous sa forme mixte ( c'est alors la plus simple ) :

(18)

$$T_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} T_0^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p}{c^2} \end{pmatrix}$$

$\rho$  c'est la masse volumique, en kilos par mètres cubes et  $p$  c'est la pression.

### Remarque :

En multipliant par la constante d'Einstein  $\chi$  on aura le second membre de l'équation (écrite sous forme mixte). Je n'écris pas le premier membre pour le moment.

Il y a deux écoles pour l'écriture de ce tenseur. Celle-ci convient si la constante d'Einstein est  $\chi = -\frac{8\pi G}{c^2}$  alors le tenseur s'écrit comme indiqué plus haut. C'est le mode d'écriture pour lequel j'ai opté, qui est aussi celui de l'ouvrage d'Adler Schiffer et Bazin, que je cite toujours en référence, pour garder une cohérence dans les notations.

Mais si on décide que  $\chi = -\frac{8\pi G}{c^4}$  ( c'est la mode maintenant ) alors ce tenseur devient :

(19)

$$T_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

Qu'est-ce qu'on remarque ?

Que  $\rho c^2$  est une densité d'énergie par mètre cube. Et  $p$  est aussi une densité d'énergie par mètre cube. La pression  $p$  c'est une quantité de Newtons par mètre carré, mais c'est aussi des joules par mètre cube.

Cela pour illustrer l'idée que les termes, dans ce tenseur, sont tous de même dimension.

Je reviens à mon problème : comment obtenir des formes covariante  $T_{\mu\nu}$  et contravariante  $T^{\mu\nu}$  ?

Pour passer de  $T_{\mu}^{\nu}$  à  $T_{\mu\nu}$  il faut *descendre* un indice. Et pour cela on utilise la matrice métrique (diagonale) sous sa forme covariante  $g_{\mu\nu}$ .

En écrivant les choses avec rigueur cela donnerait :

$$(20) \quad T_{\mu\nu} = T_{\mu}^{\alpha} g_{\alpha\nu}$$

ce qui veut dire qu'on somme sur puisque, convention d'Einstein, cet indice figure à la fois en haut et en bas dans cette expression.

De manière plus rustique j'écrirai :

(21)

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

On se servira plus loin d'une métrique particulière qui est la métrique correspondant à un solution stationnaire à symétrie sphérique et qui s'écrit :

$$(22) \quad ds^2 = e^{\nu} (dx^0)^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

où  $\nu$  et  $\lambda$  sont des fonctions de  $r$ . Cette notation a un siècle d'âge. Elle a été introduite par des gens qui pensait que cela serait une bonne idée de conserver la signature de cette métrique. En effet si  $\nu$  et  $\lambda$  sont réels, alors les fonctions  $e^{\nu}$  et  $e^{\lambda}$  sont strictement positives. Cela nous amène à écrire la matrice métrique sous sa forme covariante :

$$(23) \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

et on obtient la forme covariante du tenseur énergie-impulsion :

$$(24) \quad T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

On va maintenant construire la forme contravariante du tenseur  $\mathbf{T}$ . Pour cela il faut « monter un indice » et pour ce faire on va utiliser la métrique, écrite sous sa forme contravariante. Les termes de celle-ci sont simplement inverses de ceux de la forme covariante, c'est à dire que :

$$(25) \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

Et on aura la forme contravariante  $T^{\mu\nu}$  du tenseur énergie impulsion :

$$(26) \quad T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

A propos, je pourrais appliquer cette technique de montée et de descente d'indice au tenseur métrique lui-même et je vois que le produit de la forme covariante par la forme contravariante me donne la matrice unité :

$$(27) \quad \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{g_{00}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{g_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mais au fait, puisque j'ai monté ou descendu un indice ceci c'est autre que  $g_{\mu}^{\nu}$

Donc la forme mixte de la matrice métrique  $g_{\mu}^{\nu}$  est la matrice identité  $\delta_{\mu}^{\nu}$

A stocker dans un coin de votre tête.

Continuons à approcher les problèmes en douceur. L'équation d'Einstein est donc une équation traduisant l'égalité  $\mathbf{G} = \chi \mathbf{T}$  et qui peut s'écrire de trois façons, strictement équivalentes :

$$(28) \quad G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

$$(29) \quad G_{\mu}^{\nu} = \chi T_{\mu}^{\nu}$$

$$(30) \quad G^{\mu\nu} = \chi T^{\mu\nu}$$

Des équations qui produiront la même solution métrique, sous trois formes différentes.

Maintenant on va considérer ce mystérieux tenseur de Ricci, dont les composantes se calculent à partir du tenseur métrique. On expliquera pas comment car c'est long et fastidieux. Plus loin, on ne fournira que le résultat. Un tenseur de Ricci qui existe évidemment lui aussi sous trois formes. Connaissant l'une d'elle on peut en déduire les deux autres et utilisant le tenseur métrique pour des montées ou descentes d'indices.

### Le scalaire de Ricci :

On le calcule à partir du tenseur de Ricci et de la métrique, selon :

$$(31) \quad R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$$

Il nous manque encore un outil supplémentaire. Reprenons la métrique de la sphère :

$$(32) \quad ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Si ce considère l'élément de surface correspondant à ces deux accroissements, il vaut :

$$(33) \quad d\sigma = (R d\theta) \times (R \sin\theta d\varphi) = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

Le déterminant de la métrique est :

$$(34) \quad g = \det(g_{\mu\nu}) = R^4 \sin^2 \theta$$

Alors

$$(35) \quad d\sigma = \sqrt{g} d\theta d\varphi$$

Eh bien cette loi est générale. Si vous repreniez par exemple la métrique du tore, qui doit traîner quelque part dans une de les vidéos ; Si vous voulez évaluer le bout de surface qui correspond à  $(\theta, d\theta, \varphi, d\varphi)$  ça sera  $d\sigma = \sqrt{\det(g_{\mu\nu})} d\theta d\varphi$

On va pousser es choses plus loin et considérer la métrique 3D :

$$(36) \quad ds^2 = R^2 du^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

L'élément de volume sera  $d^3x = R^3 \sin\theta du d\theta d\varphi = \sqrt{\det g_{\mu\nu}} du d\theta d\varphi$

Et on peut même pousser jusqu'à du 4D en écrivant :

$$(37) \quad d^4v = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = d^4x$$

### L'Action d'Einstein-Hilbert

Nous voilà au bout de nos peines. On va fabriquer une quantité  $R\sqrt{-\det g_{\mu\nu}}$  où  $R$  est le scalaire de Ricci. Ça ressemble à une espèce de densité de courbure 4D. Et avec ça Hilbert fabrique l'action :

$$(38) \quad S = \int_{D^4} R \sqrt{-g} d^4x$$

Elle est prise dans un domaine  $D^4$ , un domaine à quatre dimensions. Il applique alors une méthode variationnelle. Quelle est l'inconnue ? C'est la métrique qui structure ce domaine. Ces métriques solutions selon telles que :

$$(39) \quad \delta S = \delta \int_{D^4} R \sqrt{-g} d^4x = 0$$

La première solution c'est la métrique de Lorentz (16). Vous remarquez au passage que la racine carré de moins sont déterminant donne 1.

Donc l'élément d'hypervolume de la métrique de Lorentz, de l'espace 4D de Minkowski est

$$(40) \quad d^4v = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

C'est un bête hypercube. C'est aussi une indication que l'espace structuré par cette métrique est « plat ». La somme des angles d'un triangle tracé avec trois géodésiques vaut  $\pi$ . L'espace de Minkowski est « non courbe ».

Quand on a sous les yeux la façon dont on calcule le tenseur de Ricci on voit qu'il est fait avec des dérivées de coefficients de la métrique. Or dans la métrique de Lorentz ces coefficients sont constants. Donc le tenseur de Ricci est nul et ça colle avec l'équation (39). Mais ça n'est pas la seule solution. Il faut alors expliciter :

$$(41) \quad \delta \int_{D^4} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = \int_{D^4} (\delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta \sqrt{-g}) d^4x = 0$$

Vous trouverez le détail de ce calcul aux pages 359 et 360 du Adler Schiffer et Bazin. On a trois intégrales. La première est nulle. Et on montre que :

$$(42) \quad \delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{c'est l'équation (11.30)})$$

Voyons ce qui reste.

$$(43) \quad \int_{D^4} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0$$

qui sera satisfaite si :

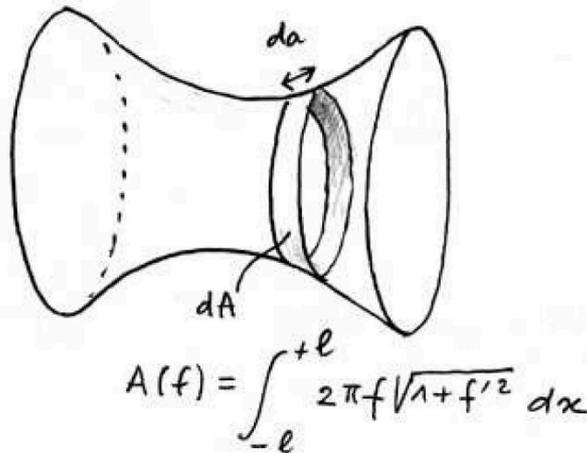
$$(44) \quad \boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0}$$

Et voilà la première équation trouvée par Einstein, sans second membre. C'est avec elle qu'il pourra calculer l'avance du périhélie de Mercure et c'est également à partir de cette équation que Schwarzschild, mobilisé sur le front russe en 1917, trouvera sa première solution.

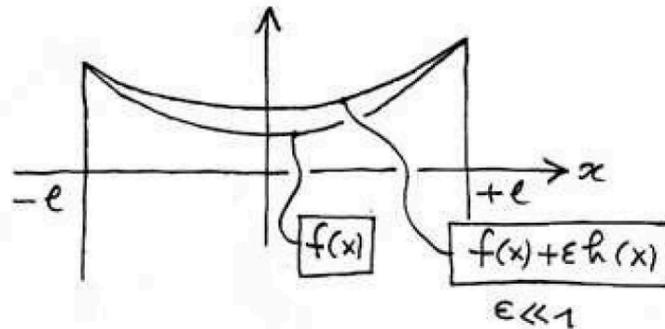
On peut faire une analogie avec le film de savon. Dans le pdf du Voyage de Nicolas Bourbakof :

[http://ww.jp-petit.org/papers/bourbakof\\_fr.pdf](http://ww.jp-petit.org/papers/bourbakof_fr.pdf)

Dans ce cas l'intégrale d'action était la surface s'appuyant sur deux cercles :



On procédait par méthode variationnelle en faisant varier la fonction  $f(x)$  représentant la courbe de la méridienne de cette surface, de révolution, si les deux cercles sont coaxiaux.



C'est à dire qu'on faisait :

$$\delta \int_{-l}^{+l} f \sqrt{1+f'^2} dx = 0$$

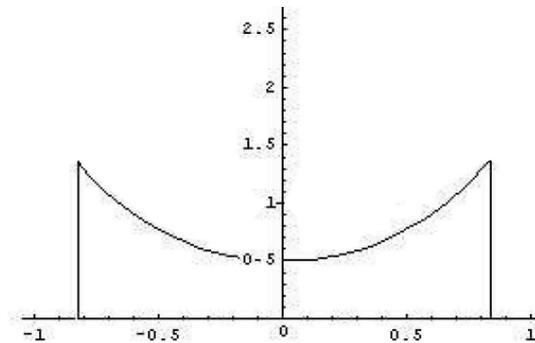
ce qui nous conduisait à l'équation différentielle :

$$1 + f'^2 - f f'' = 0$$

qui donnait l'aire minimale, correspondant à l'équation de la méridienne :

$$f(x) = \frac{e^{sx} + e^{-sx}}{s}$$

correspondant à la courbe :

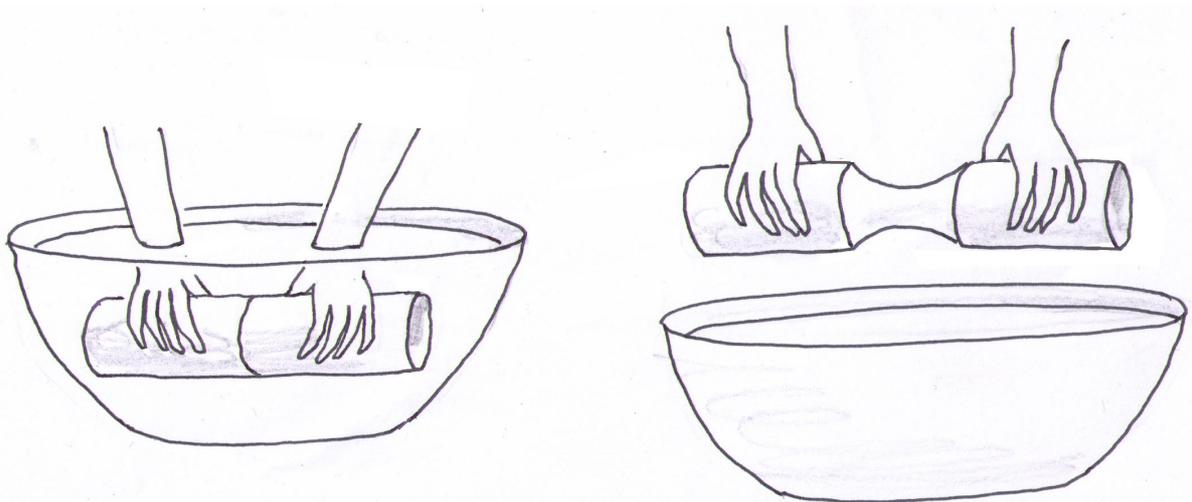


Ceci est une surface 2D. A partir de l'équation de la méridienne on peut calculer la métrique  $g_{\mu\nu}$  correspondante et le tenseur de Ricci  $R_{\mu\nu}$  qui en découle (ce que je ne fais pas).

Je *conjecture* que l'équation de la surface devrait correspondre à une équation  $R_{\mu\nu} = 0$  (ce qui serait à vérifier, mais je laisse à d'autres le soin de le faire).

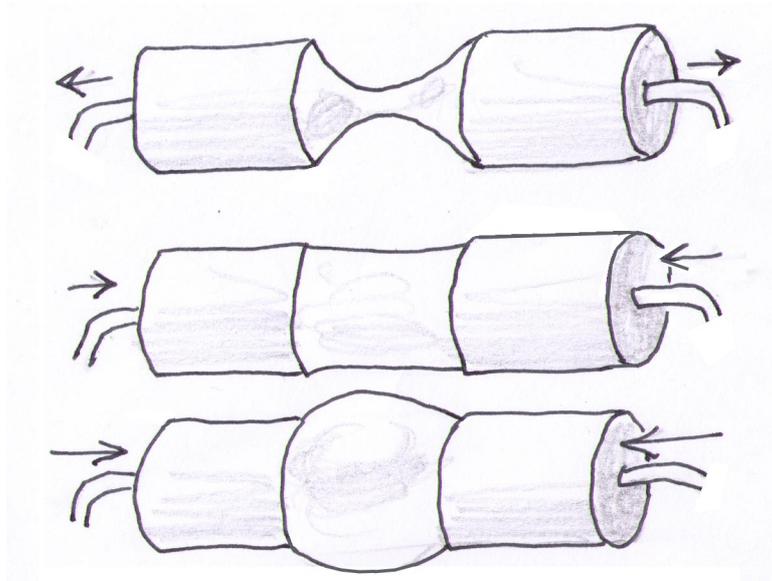
Peut-on modifier le profil de cette surface ?

Imaginons qu'on plonge dans cette eau savonneuse non deux cercles, mais deux cylindre coaxiaux bordés chacun par deux cercles de même diamètre. Quand les cylindres sont immergés, deux cercles-bord sont en coïncidence. Puis on les écarte. On devrait retrouver le même problème, avec la même solution :



Mais ce système devrait permettre, en adaptant des embouts, de modifier la différence de pression de part et d'autre du film de savon, en modifiant sa forme.

Avec deux situations extrêmes, se traduisant par des inexistences de solutions. Une recherche théorique qui s'accompagnerait du travail expérimental.



Je conjecture que la solution correspondrait alors à une équation tensorielle du type :

$$R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

Le second membre comprenant la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur du film de savon.

Un étudiant pourra alors approcher ce problème par méthode variationnelle en construisant l'action dont découle une telle équation. Il ne s'agit plus de minimiser la surface, mais de rendre compte de l'équilibre du film de savon, où la force résultant de la différence de pression entre les deux côtés du film est équilibré par les forces de tension superficielle dans le film. L'équation serait sans doute un peu plus compliquée que ce qui est écrit ci-dessus, mais c'est un intéressant problème de physique mathématique.

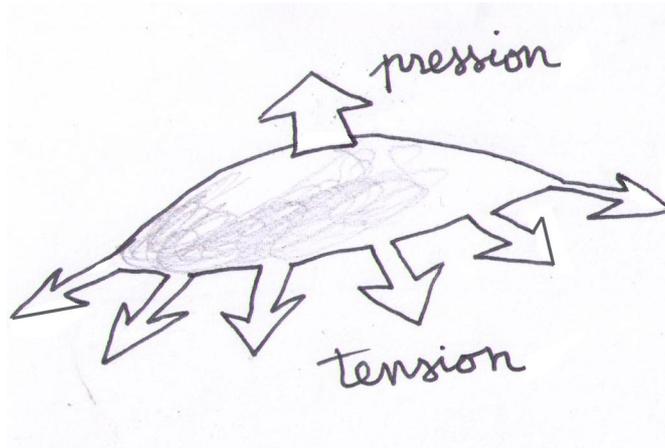
A travers cette image on percevra la non-linéarité foncière du problème. En effet, soit  $p$  la différence de pression appliquée. On pourrait s'attendre à ce que la problème puisse être formulée de cette façon :

1 - J'ai une surface, un film de savon, qui est solution de  $R_{\mu\nu} = 0$

2 - Ce crée une différence de pression  $p$  qui modifie la forme du film et que je traduis par l'adjonction d'une tenseur  $T_{\mu\nu} = 0$  construit à partir de cette différence de pression.

3 - La nouvelle forme de la surface se déduit de :  $R_{\mu\nu} \leftarrow T_{\mu\nu}$

et du tenseur de Ricci j'en déduis la métrique et les géodésiques-solutions  $g_{\mu\nu}$ . Mais vous voyez de suite que ça n'est pas si simple et qu'ainsi le problème est mal posé. En effet pour évaluer « la cause » vous avez besoin de calculer la résultante des forces de tension sur l'élément du film. Et pour cela, vous devez faire intervenir la géométrie de la surface.

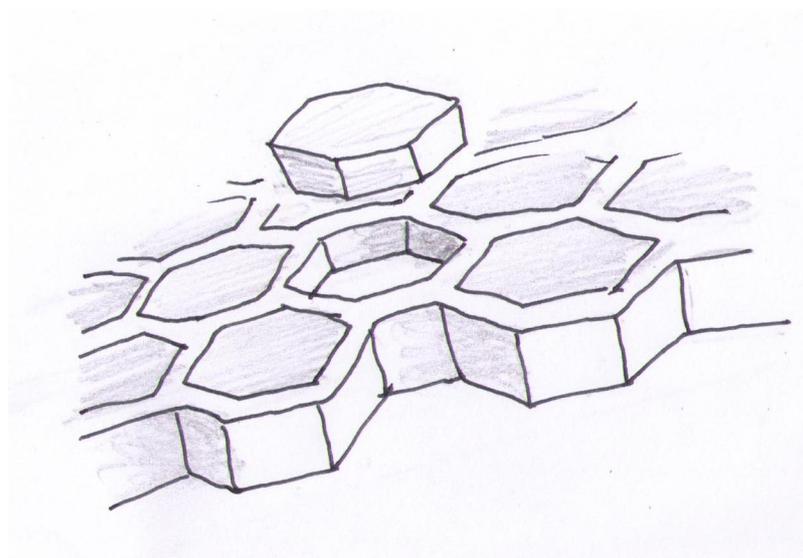


Donc ça signifie que :

$$R_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}) = T_{\mu\nu}(p, g_{\mu\nu})$$

expression de la non-linéarité du problème.

Ainsi la solution de la Relativité Générale présente des analogies avec cette histoire de surface 2D, que j'avais déjà évoquée en montrant Lanturlu modifiant localement la géométrie d'une tôle avec un jet d'air surchauffé ou au contraire plus froid. C'est à dire en concentrant en certains endroits plus ou moins d'énergie. Il serait tout à fait possible de créer en image de synthèse cet image d'une surface constitué d'un pavage de petits éléments, isolés les uns des autres, qui puisse matérialiser un « champ de tension »  $T_{\mu\nu}$ . L'isolation empêcherait la conduction de la chaleur d'un élément à l'autre.



Une sorte de nid d'abeille dont les cellules seraient isolées les unes des autres. Si ça serait compliqué à réaliser physiquement, ça serait faisable en images de synthèses. En jouant sur la quantité de chaleur déposée dans chaque cellule on pourrait voir la surface se contorsionner et changer de forme. Une sorte d'expérience (de pensée) de géométrie différentielle.

En fait on pourrait aussi envisager un dispositif expérimental avec des pavages hexagonaux joints par un matériau suffisamment isolant pour que la conduction reste

faible, d'élément à éléments adjacents. On pourrait communiquer de la chaleur à chaque élément en y immergeant une résistance électrique alimentée par un fil. Du froid ; ça serait un peu plus compliqué. Il faudrait des micro-tubulures. Mais nous vivons à l'ère des nanotechnologies. On pourrait alors créer des champs de dilatation à volonté, et voir la surface se contorsionner en conséquence. Au passage son comportement mécanique serait modifié. Un tel « matériau intelligent » pourrait, avec un temps de réponse adapté, suffisamment court, réagir en interdisant la propagation de trains d'ondes en son sein. Avant même qu'on dispose de la technologie ad hoc, ces simulations numériques pourraient être à même d'orienter des recherches.

Avec cette image vous pouvez comprendre que l'adjonction d'un second membre dans l'équation d'Einstein modifie la forme de l'hypersurface 4D<sup>1</sup>.

$$(45) \quad \boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}}$$

Toujours est-il que cette équation dérive d'une action, celle d'Einstein-Hilbert, qui s'écrit comme cela<sup>2</sup> :

$$(46) \quad J = \int_{D^4} (R - \chi L) \sqrt{-g} d^4x$$

Dans les méthodes variationnelles, l'action s'écrit :

$$(47) \quad J = \int_{D^n} L d^n x$$

A dessin, je n'ai pas pris la même police de caractère pour cette lettre L, qui est alors le *Lagrangien*. Dans  $(R - \chi L) \sqrt{-g}$  on parle alors de « densité Lagrangienne ». Ce qui est mis dans l'intégrale d'action et qui déterminera la forme de l'hypersurface 4D solution, s'appuyant sur son contour D4. Et c'est en écrivant :

$$(48) \quad \delta \int_{D^4} (R - \chi L) \sqrt{-g} d^4x = 0$$

qu'on tombe sur l'équation d'Einstein (45).

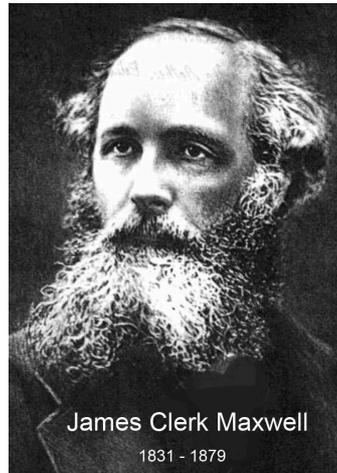
### La contrainte mathématique de l'équation d'Einstein

Einstein n'a pas construit son équation en partant de l'action. C'est l'inverse qui s'en produit. Et c'est ce qui se produit en général. Quand Maxwell a écrit ses équations en

<sup>1</sup> En prenant l'exemple de la non linéarité du problème du film de savon cela permet d'évoquer celui de l'équation d'Einstein. Pour ceux qui veulent aller plus loin, voir les pages 366 à 370 du Adler Schiffer et Bazin, avec l'introduction d'un « pseudo-tenseur »  $t_{\mu}^{\nu}$ , qui montre que donnant au second membre la forme (19) on escamote en quelque sorte cette non-linéarité.

<sup>2</sup> Adler, Schiffer et Bazin, équation (11.111) page 377

1862, le concept d'action lui-même n'avait pas été reconnu, et c'est longtemps après qu'on a montré que ces équations pouvaient émerger d'une technique variationnelle et d'une action.



De même c'est Hilbert qui a reconstruit l'action d'où découlait cette équation de la Relativité Générale.

Pour construire son équation Einstein a procédé différemment. Il a d'abord tenté d'écrire :

$$(49) \quad R_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

Puis il a tenté de recoller avec la physique du laboratoire, non relativiste. Ça paraît logique. Alors, qu'est-ce que nous dit cette physique non relativiste ? Qu'il y a des choses qui se conservent, et des équations de conservation. On les retrouve en écrivant que le tenseur  $T_{\mu\nu}$  est « à divergence zéro », ce qui s'écrit :

$$(50) \quad \nabla T_{\mu\nu} = 0$$

Pour qu'on retrouve tout cela à l'échelle de la physique du laboratoire, d'abord avec une courbure faible ( $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$  : métrique de Lorentz) puis même en non-relativiste ( $v \ll c$ ). Il fallait donc que l'équation (59) aient « une dérivation covariante nulle », qui est l'équivalent de la dérivation précédemment invoquée, mais en espace courbe. Soit un tenseur  $A_{\mu}^{\nu}$ . On écrit que sa dérivation covariante est nulle comme ceci (une des multiples notations):

$$(51) \quad \partial_{\nu} A_{\mu}^{\nu}$$

Le problème est que la dérivé covariante, la divergence du tenseur de Ricci c'est pas nulle. Einstein, qui avait récupéré ce tenseur comme on farfouille dans une boîte à outils, a donc bricolé son premier membre pour que l'ensemble ait une divergence zéro et ça lui a donné :

$$(51) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

Voilà d'où vient, chez lui, ce terme  $-\frac{1}{2}R g_{\mu\nu}$

D'une démarche de physicien. Car Einstein était un physicien génial, pas un mathématicien. Le mathématicien (également génial), c'était Hilbert. Celui-ci raisonnait en terme d'action, de dérivation variationnelle.

Essayons avec une action

$$(52) \quad J = \int_{D^4} R d^4x = \int_{D^4} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} d^4x$$

La variation donne :

$$(53) \quad \delta \int_{D^4} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} d^4x = \int_{D^4} \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} d^4x + \int_{D^4} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0$$

Il se trouve que la première intégrale est nulle, donc cette approche fournit l'équation de champ :

$$(54) \quad R_{\mu\nu} = 0$$

Il est possible que cela soit ce qu'a fait Hilbert. A ce moment il s'est dit « Teufel ! je ne retrouve pas l'équation de ce maudit physicien autrichien ! Que faire ? »

La solution a été de mettre dans l'intégrale non simplement le scalaire de Ricci, mais une *densité Lagrangienne*, en écrivant :

$$(55) \quad S = \int_{D^4} R \sqrt{-g} d^4x$$

Et à ce moment l'approche variationnelle donne :

$$(56) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 0$$

En passant à l'action

$$(57) \quad J = \int_{D^4} (R - \chi L) \sqrt{-g} d^4x$$

On obtient l'équation d'Einstein :

$$(58) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

Et tout rentre dans l'ordre.

Au passage, vous savez qu'en essayant de construire un modèle d'univers stationnaire Einstein a eu un souci. Cet univers s'effondrait sur lui-même instantanément. C'est alors qu'Hilbert lui a dit :

- *Mon cher, vous n'avez qu'à refaire le même coup. Vous rajoutez une constante, multipliée par le tenseur métrique, comme ceci :*

$$(59) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

*et je vais vous fabriquer l'action qui va avec.*

Avec cet exemple de cette collaboration entre Einstein le physicien et Hilbert le mathématicien, vous avez un exemple qui illustre la création d'équations à partir de faits expérimentaux et observationnels et la création d'actions à partir de considérations purement géométriques, ces démarches n'étant pas automatiquement synchrones.

Avec Maxwell ( et évidemment avant celui-ci, Newton ) vous avez un exemple du génie des physiciens anglais. Et si vous regardez les dates, vous constatez encore une fois que la physique anglaise était au dix-neuvième siècle une véritable forge d'où émergent des fantastiques outils.

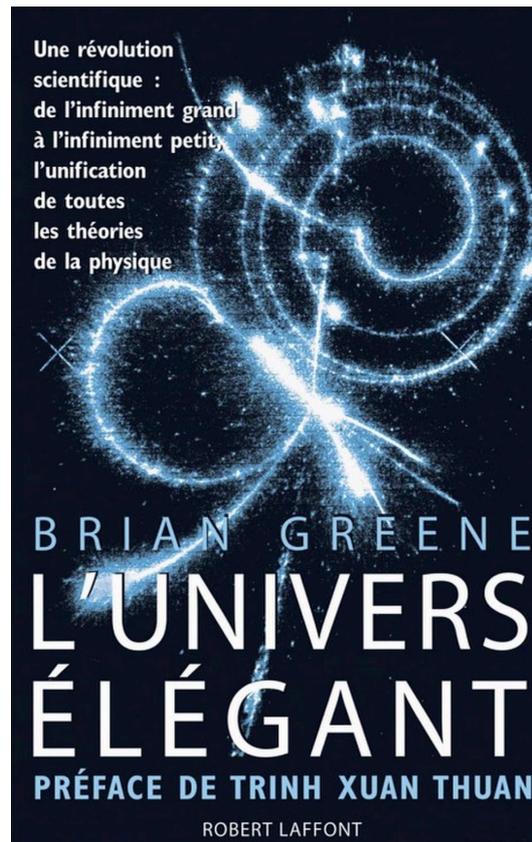
Einstein et Hilbert ( et bien d'autres à cette époque ) continuent dans cette veine. Puis le XX<sup>e</sup> siècle voit émerger la mécanique quantique (exploitant cet autre outil que constituent les espaces de Hilbert). De manière sous-jacente, c'est toujours cette idée d'action et de principe variationnel qui est le fil conducteur, jusqu'à Feynmann, avec ses intégrales de chemin.

Puis la source semble se tarir, l'intuition créatrice disparaît. Alors, que vont nos modernes physiciens théoriciens, et ... cosmologistes ? Il perdent le contact avec l'observation, et se lancent dans une sorte de rêverie.

Arthur Koestler avait écrit un célèbre ouvrage intitulé « Les Somnambules ». Il y montrait que les grands novateurs ressemblent à ces somnambules qui avancent à tâtons dans l'obscurité. On ne sait pas pourquoi, certains, soudain, certains s'engagent dans des voies nouvelles, insoupçonnées, sans qu'on sache ce qui les guide, pourquoi ils empruntent ce couloir plutôt qu'un autre, dans le dédale de la connaissance. Quitte tout d'un coup, comme il me montrait, à louper la bonne correspondance et à s'entêter sans une impasse, alors qu'ils passent à côté d'un nouveau couloir, de la suite logique de leur démarche.

Quelles sont les voies suivies par nos modernes physiciens théoriciens ? Si vous écoutez un type comme Michael Green (« l'univers élégant », 1999, un best seller mondial) il vous dira que les théories physiques que lui et ses pareils sont en train d'élaborer (la théorie des cordes) sont si en avance que leur confirmations observationnelles ou expérimentales n'émergeront peut être que dans des siècles (...). Si vous lisez ou relisez cet ouvrage vous y trouverez une suite ininterrompue de ce qui ne mérite pas d'autre qualificatif que de bouffonneries.

Une démarche totalement stérile, qui a empoisonné la physique théorique pendant un demi siècle.



Dans ce style, tout le monde s'y est mis. Citons cette phrase grandiloquente de l'académicien Thibaud Damour, dans le numéro de juillet 2005 de Science et vie :

- *L'annihilation de branes aurait pu donner naissance à des cordes gigantesques, qui pourraient se trahir lorsqu'elles s'enroulent sur elles-mêmes et claquent à la manière de fouets. Loin dans le temps, tels des fouets qui, à la fin, laissent leur marque, de gigantesques cordages claquent. Alors l'espace se crée (...).*

La physique d'aujourd'hui : L'intuition est morte. Il ne reste que du vide et des mots, beaucoup de mots. De la grandiloquence, partout, dans tous les pays, pour masquer le vide qui est derrière.

### **De la physique à deux branes.**

Je vais vous donner un exemple qui est l'article de 40 pages publié en 2002 par Thibaud Damour dans la prestigieuse revue Physical Review D, figurant en annexe de ce pdf, pour que vous puissiez suivre.

PHYSICAL REVIEW D  
*covering particles, fields, gravitation, and cosmology*

Highlights Recent Accepted Authors Referees Search Press About

## Effective Lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity

Thibault Damour and Ian I. Kogan  
 Phys. Rev. D **66**, 104024 – Published 27 November 2002

Article References Citing Articles (107) PDF Export Citation

### ABSTRACT

We discuss the fully nonlinear formulation of multigravity. The concept of universality classes of effective Lagrangians describing bigravity, which is the simplest form of multigravity, is introduced. We show that nonlinear multigravity theories can naturally arise in several different physical contexts: brane configurations, certain Kaluza-Klein reductions and some non-commutative geometry models. The formal and phenomenological aspects of multigravity (including the problems linked to the linearized theory of massive gravitons) are briefly discussed.

Received 7 June 2002

DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.104024>

©2002 American Physical Society

Pourquoi « Bigravity » ? Parce que Damour considère deux « branes ».

Je ne vais rien inventer, mais simplement traduire les phrases qui émaillent cet article.

Dans l'introduction, vous pouvez lire :

The modification of GR that we are going to consider is linked to the issue of “massive gravity” (for very light gravitons, with Compton wavelength of cosmological scale). A generic prediction of multidimensional constructions is the existence of massive gravitons. In particular, any Kaluza-Klein (KK) model predicts, besides a massless graviton, the presence of an infinite tower of massive gravitons.

Je traduis :

*La modification de la Relativité Générale que nous allons considérer est issue de la « gravité massique », en tenant compte de gravitons de très faible masse (lesquels ont alors une longueur de Compton associée qui est comparable à la taille de l'univers).*

*Une prédiction générale à propos de ces constructions multidimensionnelles est l'existence de gravitons dotés d'une masse. En particulier tout modèle de Kaluza-Klein prédit qu'il existe, en dehors des gravitons de masse nulle, un spectre infini de gravitons dotés d'une masse.*

Et cela alors que l'existence du graviton n'est nullement établie. Mais Damour ne s'arrête pas à ce détail. Continuons.

Though we shall illustrate below our approach in the context of particular multidimensional realizations (notably brane models exhibiting multilocalization [1],[7] or quasi-localization [2], [8], [9]), we view our considerations as concerning a very general phenomenon: the concept of *Weakly Coupled Worlds* (WCW). The concept of WCW is very simple: one assumes that there are several Universes (labelled by  $i = 1, \dots, N$ ), each endowed with its own metric  $g_{(i)\mu\nu}$  and set of matter fields  $\{\Phi_i\}$ , which are coupled only through some mixing of their gravitational fields.

*Lorsqu'on considère les théories où l'univers est doté de dimensions supplémentaires ceci débouche sur une spectre infini de masse de gravitons.*

*En même temps que nous nous situons dans le contexte de modèle multidimensionnels, en particulier celui des branes, dotées d'une multilocalisation, voire d'une quasi-localisation (...), nous prendrons en charge l'image de Mondes faiblement couplés.*

*C'est très simple (...). On considère qu'il y a plusieurs univers, numérotés de 1 à  $N$ , qui ont chacun leur propre métrique  $g_{\mu\nu}$  et leur propre distribution de matière, et qui sont couplés à travers un certain mélange de leurs champs gravitationnels.*

Un peu plus loin :

A recent theorem [10] has proven that the only consistent non-linear theory involving  $N$  massless gravitons is the sum of  $N$  decoupled GR-type actions

$$S_0 = \sum_{i=1}^N S[g_i, \Phi_i], \quad (1)$$

$$S[g_i, \Phi_i] = \int d^4x \sqrt{-g_i} [M_i^2 R(g_i) - \Lambda_i + L(g_i, \Phi_i)]. \quad (2)$$

Traduction :

*Un théorème récent (10) (et là, il se cite lui-même) a montré que la seule théorie non-linéaire cohérente avec  $N$  gravitons sans masse reposait sur la somme de  $N$ - actions du type de celle de la Relativité Générale.*

Et là vous reconnaissez dans (2) l'action S, l'élément de volume, un scalaire de Ricci par univers, un Lagrangien L et, pour faire bonne mesure, une constante cosmologique par univers.

Plus loin :

## 2 Universality Classes of Bigravity Effective Lagrangians

For simplicity, we focus, in this paper, on the case of “bigravity”, i.e.  $N = 2$ . Understanding this case is a prerequisite for understanding the general multigravity case ( $N > 2$ ).

*Pour plus de simplicité (...), dans ce papier, nous nous concentrerons sur le cas d'une « bigravité », avec  $N = 2$ . Comprendre ce qui se passe avec deux branes est un prérequis pour comprendre une multigravité générale, à  $N$  branes (...).*

Bien sûr ....

Using, when  $N = 2$ , the notation  $g_{(1)} = g_L$  (for “Left”) and  $g_{(2)} = g_R$  (for “Right”), and factoring a conventional “average volume factor”  $(g_L g_R)^{1/4}$  out of the scalar density  $\mathcal{V}^4$ , the generic bigravity action reads

$$S = \int d^4x \sqrt{-g_L} (M_L^2 R(g_L) - \Lambda_L) + \int d^4x \sqrt{-g_L} L(\Phi_L, g_L) + \int d^4x \sqrt{-g_R} (M_R^2 R(g_R) - \Lambda_R) + \int d^4x \sqrt{-g_R} L(\Phi_R, g_R) - \mu^4 \int d^4x (g_R g_L)^{1/4} V(g_L, g_R). \quad (6)$$

*Donc, quand  $N = 2$  nous utiliserons l'indice  $L$ , left (gauche) pour une des branes et  $R$  (Right) pour l'autre brane. L'action générique de la bigravité est donc :*

Les deux premières lignes ce sont deux copies de l'action classique de la Relativité Générale. A cela il ajoute un « terme d'interaction » et pour que cela ressemble à une densité Lagrangienne il faut trouver l'équivalent du classique  $\sqrt{-g}$ . Alors Damour dit qu'il va utiliser un « volume moyen » en prenant  $\sqrt[4]{g_R g_L}$ . Autrement dit il prend la racine quatrième du produit des déterminants des deux métriques. Quelle est la signification géométrique d'un tel terme ? Mystère. On est dans le bricolage complet.

Où se situe, dans cette bouillie, cette logorrhée, *la cohérence physique et mathématique ?*

Souriau avait raison quand il qualifiait le physique théorique contemporaine de physique sans expérience et de mathématique sans rigueur.

Si on effectue ensuite une dérivation de l'action on va tomber sur deux équations qui contiennent chacune les termes qui émergent de la présence des deux scalaires de Ricci, de la constante cosmologique et des Lagrangiens de la matière. Voilà donc les deux équations de champ couplées qui émergent de ce Lagrangien :

### 2.3 Equations of motion

The equations of motion derived from the bigravity action read

$$\begin{aligned} 2 M_L^2 \left( R_{\mu\nu}(g^L) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^L R(g^L) \right) + \Lambda_L g_{\mu\nu}^L &= t_{\mu\nu}^L + T_{\mu\nu}^L, \\ 2 M_R^2 \left( R_{\mu\nu}(g^R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^R R(g^R) \right) + \Lambda_R g_{\mu\nu}^R &= t_{\mu\nu}^R + T_{\mu\nu}^R. \end{aligned} \quad (14)$$

Here  $T_L^{\mu\nu} \equiv 2(-g_L)^{-1/2} \delta S_{\text{matter}}^L / \delta g_{\mu\nu}^L$  denotes the stress-energy tensor of the matter on the left brane ( $S_{\text{matter}}^L = \int d^4x \sqrt{-g_L} L(\Phi_L, g_L)$ ), while  $t_L^{\mu\nu} \equiv g_L^{\mu\alpha} g_L^{\nu\beta} t_{\alpha\beta}^L$  denotes the effective stress-energy tensor (as seen on the left brane) associated to the coupling term  $S_{\text{int}} \equiv$

Réécrivons-les avec les notations « Janus » pour pouvoir ultérieurement comparer. Ça s'écrit :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} + \Lambda^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} &= T_{\mu\nu}^{(+)} + t_{\mu\nu}^{(+)} \\ R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} + \Lambda^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} &= T_{\mu\nu}^{(-)} + t_{\mu\nu}^{(-)} \end{aligned}$$

Tout se joue, évidemment, dans ces termes de couplage  $t_{\mu\nu}^{(+)}$  et  $t_{\mu\nu}^{(-)}$ . La suite, il y en a sur quarante pages. Damour passe en revue les différences « modèles ». Il y a d'abord les branes, bien sûr. Ensuite on évoque les modèles de Kaluza-Klein, inspirés de la théorie des cordes.

### 3.2 Kaluza-Klein Models

As said in the Introduction, and sketched in Fig. 1, one expects generic Kaluza-Klein models to give rise to “regular spectra” containing no gap allowing one to separate a finite number of light gravitons from an infinite tower of heavy ones. We wish, however, to emphasize the existence of a class of KK models where such a gap can exist.

Je traduis :

*Comme il a été dit dans l'introduction et illustré sur la figure 1 on s'attend à ce que les modèles génériques du type de Kaluza Klein créent un spectre régulier,*

*exempt de gap, où on peut ranger un nombre fini de gravitons légers et les séparer ainsi d'une série infinie de gravitons lourds. Nous tenons cependant à rappeler que dans le cadre de ces modèles de Kaluza Klein il existe un tel gap ( séparant les gravitons légers des gravitons lourds ... )*

C'est vraiment de la pseudo science, avec un enchaînement de pseudo-résultats. Qui est le découvreur qui a ainsi démontré l'existence d'un tel gap dans le spectre infini des gravitons massifs ? C'est Kogan, le cosignataire de cet article. C'est grâce à ce résultat essentiel que Damour peut s'étendre sur quarante pages, en pouvant ainsi se restreindre à un petit nombre de gravitons massifs, au milieu d'une infinité ....

On apprend au passage que des branes pourraient être connectées :

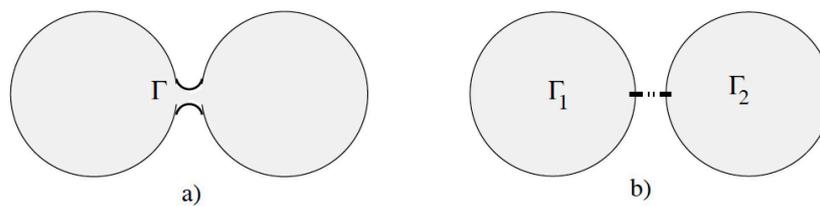


Figure 3: Manifold  $\Gamma$  (Fig. 3a) is on the verge of splitting into two classically disconnected manifolds  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  (Fig. 3b). These two manifolds may be connected at the quantum level.

A gauche, deux branes sur le point de se séparer. Mais le texte précise qu'elles pourraient rester connectées à un niveau quantique ....

## 5 Conclusions

In this paper we suggested a new paradigm concerning “massive gravity” and “large scale modification of gravity”. Considering the fully nonlinear bigravity action suggests to change viewpoint: instead of the theory with massless and massive graviton(s) we had in linearized approximation, we are dealing with several interacting metrics. We introduced the concept of universality class which we formulated using bigravity (two interacting metrics) as an example. Different approaches (brane, KK, non-commutative geometry) naturally lead to different universality classes for the fully nonlinear bigravity action. Another important new suggestion is that almost all solutions must now be of the non-asymptotically flat (cosmological) type.

This new formulation can change the standard problematic of the  $m^2 \rightarrow 0$  discontinuity. We showed the existence of classes of solutions that are compatible with “our universe”. However, we do not claim to have proven that general solutions of bigravity are phenomenologically acceptable. The two main problems of massive gravity (ghost, potential blow up of some field variables when  $m^2 \rightarrow 0$ ) must still be examined in detail. The important problem is to find the matching to the local sources of the field so that the full metric is free of singularities. We do not worry about matching at infinity because we abandon the requirement of asymptotic flatness. It is possible that in some models of bigravity such local matching does not exist because of the explicit or implicit presence of ghost modes in the theory. Such models would be physically unacceptable. We note in this respect that the 6-dimensional model discussed in [21] which does not contain negative tension branes, contains instead either branes with equations of state violating the weak energy condition  $T_{\mu\nu}^{\text{brane}} \ell^\mu \ell^\nu \geq 0$  (with light-like  $\ell^\mu$ ) or has a conifold singularity in the bulk. The physical consistency of this model must be further investigated. We have also quoted mathematical theorems linking the existence of a hierarchical spectrum (necessary for the derivation of an effective bigravity Lagrangian) to the necessary negativity of the Ricci curvature of the compactified manifold. This sign condition might hide the presence of ghost-like fields in the theory. These questions are pressing and deserve detailed investigation.

Assuming a positive resolution of these issues or simply taking the phenomenological viewpoint that nonlinear bigravity Lagrangians open an interesting new arena for non standard gravitational effects, we shall explore in future publications [12], [13] the nonlinear physics of bigravity actions, with a particular view on its cosmological aspects, as it may provide a natural candidate for some new type of “dark energy”.

Je n’ai pas le courage de tout traduire. Vous lirez. Damour rappelle l’architecture de l’article, les hypothèses. Un travail qui évoque « l’existence d’une classe de solutions compatibles avec notre propre univers » (...). Puis il recense la longue liste des problèmes en suspens. Bien entendu il n’émerge strictement rien qui puisse être confronté à une observation, qui puisse décrire un quelconque phénomène. Et de conclure, je cite :

*En supposant que tous ces problèmes soient résolus (...) ou simplement en notant que la bigravité non linéaire apporte un point de vue ph nom ologique intéressant (...) et un nouveau champ d'investigation vis à vis d'effets gravitationnels non-standards, nous projetons de poursuivre cette investigation à travers de futures publications, en portant en particulier l'attention sur les aspects cosmologiques, dans la mesure où ceci pourrait fournir un candidat naturel pour un nouveau type d'énergie noire.*

En clair zéro résultat, rien. Quarante page de vide cosmique, d' pist mo-blabla, publié dans la revue la plus élitiste, Physical Review D (mais dont les referees sont de gens comme Damour).

Mais ils sont légions comme ça. Dans ce rayon de la gravité massique il y a l'anglaise Claudia de Rahm, d'Imperial Collège.



Comme tous ceux-là, et celles-là, celle-ci se répand à perte de vue en conférences et en prestations dans les médias, devant un public en extase. Bien sûr, tous insistent sur le fait qu'ils travaillent sur une question-clé : l'unification entre la Relativité Générale et la Mécanique Quantique (c'est également ce que fait Aurélien Barrau). Alors qu'il n'y a pas eu l'ombre d'un progrès dans ce domaine depuis cinquante ans. Mais ça fait très chic de dire cela. Las, la « gravité quantique » reste un mot dénué de contenu, mais  a remplace les cordes, en perte de vitesse depuis quelques années. Les journalistes scientifiques, évidemment en mal de copies, pour tenir les lecteurs en haleine, présentent tous ces gens comme de successeurs d'Einstein.

Ne cherchez pas les Fermat, les Lagrange, les Maxwell, les Newton, les Laplace d'aujourd'hui. L'intuition scientifique semble avoir aujourd'hui déserté les cerveaux.

En France, pour masquer ce vide on distribue des médailles d'or, des prix, on attribue des distinctions, on pare d'habits rutilants des gens dont pas un ne laissera l'ombre d'une contribution mémorable dans l'histoire des sciences et dont les écrits, les livres, partiront dans les poubelles de la connaissance.

Depuis un demi siècle en physique, décidément

*Au royaume des aveugles, les borgnes sont rois.*

7 janvier 2019 :

### **Thibaud Damour, Luc Blanchet et Nathalie Deruelle passent à l'attaque**

Cela se traduit par deux documents. Le premier est un rapport que Damour publie dans sa page du site de l'Institut des Hautes Etudes de Bures sur Yvette, téléchargeable à l'adresse suivante :

<http://www.ihes.fr/~damour/publications/JanusJanvier2019-1.pdf>

#### **Sur le “modèle Janus” de J. P. Petit.**

Thibault Damour, IHES  
4 Janvier 2019

Une lettre du 7 décembre 2018 que M. Jean-Pierre Petit m'a adressée m'a poussé à regarder de plus près la structure et les conséquences des équations de champ de ce qu'il appelle “modèle Janus”. J'ai en particulier poursuivi plus en détail les raisonnements et arguments que je lui avais indiqués dans une lettre du 12 mars 2014; lettre écrite après réception des prépublications de ses articles récents, et notamment:

J. P. Petit. et G. d'Agostini, “Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy”, *Astrophys. Space Sci* DOI 10.1007/s10509-014-2106-5);

J. P. Petit, et G. d'Agostini, “Cosmological bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe”. *Mod. Phys. Lett. A* Vol. 29 (no 34) (2014) 145082.

Avant d'entrer dans les détails indiquons que la conclusion des arguments exposés ci-dessous sera la suivante:

*le “modèle Janus” est physiquement (et mathématiquement) incohérent.*

Le second est une lettre recommandée avec accusé de réception (...) que je reçois le 7 janvier et dont voici la copie.

Thibault Damour  
IHES, Bures-sur-Yvette,  
7 Janvier 2019

à Jean-Pierre Petit, BP 55, 84122 Pertuis

Copies: Je me réserve le droit d'envoyer des copies de cette lettre à toutes les personnes que vous citez sur votre site, dans vos vidéos, et dans vos lettres, ainsi qu'à toute personne s'intéressant au "modèle Janus".

**Objet: "modèle Janus".**

Monsieur,

j'ai bien reçu votre lettre du 7 décembre 2018. En revanche je n'ai pas souvenir d'avoir reçu (précédemment) de vous une réponse aux objections et critiques que je vous avais communiquées dans ma lettre du 12 mars 2014, écrite après réception des prépublications de vos articles récents, et notamment: J. P. Petit. et G. d'Agostini, "Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy", *Astrophys. Space Sci* DOI 10.1007/s10509-014-2106-5); et J. P. Petit, et G. d'Agostini, "Cosmological bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe". *Mod. Phys. Lett. A* Vol. 29 (no 34) (2014) 145082.

La réception de votre lettre m'a poussé à regarder de plus près la structure et les conséquences des équations de champ de ce que vous appelez "modèle Janus". J'ai en particulier poursuivi plus en détail les raisonnements et arguments que je vous avais indiqués dans ma lettre de 2014. J'ai ainsi démontré que le "modèle Janus" était physiquement (et mathématiquement) incohérent. Cette incohérence est particulièrement manifeste dans la limite quasi-newtonienne, où le "modèle Janus" implique que la matière ordinaire doit, à la fois, s'auto-attirer et s'auto-repousser gravitationnellement. J'ai posté mes raisonnements, et leurs conclusions, sur ma page web (lien "Sur le "modèle Janus de J. P. Petit" sur <http://www.ihes.fr/~damour>).

Vous comprendrez, après lecture, qu'il ne saurait être question de vous inviter à donner un séminaire à l'IHES, car vous n'avez pas de théorie cohérente, mathématiquement et physiquement bien définie, à présenter. [Notez d'ailleurs au passage que je ne suis pas, comme vous l'écrivez, "responsable du séminaire de cosmologie à l'IHES". Il n'y a en fait pas de séminaire régulier de cosmologie à l'IHES.]

Bien à vous,



Thibault Damour  
Institut des Hautes Études Scientifiques  
35, route de Chartres  
91440 Bures-sur-Yvette (France)

P.S.: Quand j' ai évoqué le nom de Souriau à Genève (le 5 novembre 2018) en répondant à une question concernant vos travaux, je faisais allusion au manque d'une dérivation Lagrangienne pouvant (éventuellement) assurer la cohérence du "modèle Janus". Il est facile de voir que la dérivation variationnelle donnée dans l'article de Sabine Hossenfelder (PRD 78, 044015, 2008) est mathématiquement invalide.

L'analyse pondue par les trois est à leurs yeux si imparable qu'ils l'ont gravée dans le marbre en l'inscrivant dans les pages du site de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques de Bures sur Yvette. Nathalie Deruelle, mathématicienne, qui fait autorité pour toute chose touchant à la Relativité Générale a apposé son sceau sur ce jugement. On notera dans la dernière ligne que l'Allemande Sabine Hossenfelder, également auteur d'une théorie bimétrique, avec deux équations de champ couplées, a aussi droit à sa volée de bois vert.

De quoi s'agit-il ?

J'ai évoqué plus haut les contraintes mathématiques liées à ces équations, le fait que leurs dérivées covariantes doivent être nulles, pour les premiers membres comme pour les seconds.

Un modèle à un instant donné, n'est jamais définitif. On peut être amené à modifier, perfectionner, arranger. Rappelez-vous qu'Einstein a aussi commencé avec des problèmes d'équilibrage entre les deux membres de son équation, qu'il a arrangé en introduisant son  $-\frac{1}{2}R g_{\mu\nu}$  dans le premier membre.

Mais, finalement, vous savez, tout s'arrange. En fait, le modèle Janus, c'est avant tout un concept. On a, non une seule entité, mais deux. La seconde se comporte comme si elle possédait une masse négative. On tente alors de rendre compte de ce jeu entre ces deux matières en écrivant :

(60)

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2}R^{(+)}g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left[ T_{\mu\nu}^{(+)} + \varphi(T_{\mu\nu}^{(-)}) \right]$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2}R^{(-)}g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[ T_{\mu\nu}^{(-)} + \phi(T_{\mu\nu}^{(+)}) \right]$$

$\varphi$  et  $\phi$  sont des fonctions des contenus en énergie-matière de l'autre secteur.

J'ai commencé par écrire :

(61)

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2}R^{(+)}g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left[ T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2}R^{(-)}g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[ T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

Cela donnait des lois d'interaction qui permettaient d'échapper à ce fichu phénomène runaway. Mais, bien sûr, il y avait déjà ce problème de grincement mathématique, que je remettais à plus tard. Un problème qui était au passage absent dans le vide (ce qui représente une bonne partie du cosmos) et quand on considère l'univers comme

homogène, c'est à dire dans deux des trois solutions qui constituent l'essentiel de la Relativité Générale.

Ceci étant, quand je tentais de construire une solution instationnaire je n'arrivais pas à construire une solution où apparaisse la dissymétrie entre les deux secteurs, où la valeur absolue de la densité négative soit grande devant celle de notre propre matière, ce qui avait donné des tas de résultats intéressants avec les simulations de la structure à grande échelle.

J'ai donc essayé autre chose. En faisant apparaître les « facteurs d'échelle » des deux univers,  $a^{(+)}$  et  $a^{(-)}$ . Ca m'a amené à écrire :

(62)

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2}R^{(+)}g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left[ T_{\mu\nu}^{(+)} + \left( \frac{a^{(-)}}{a^{(+)}} \right)^3 T_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2}R^{(-)}g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[ \left( \frac{a^{(+)}}{a^{(-)}} \right)^3 T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

Pas de problème d'incohérence mathématique à ce stade. Ca n'apparaît que quand l'univers cesse d'être homogène. En prime il y avait une jolie solution, trouvée la première fois par William Bonnor. J'ai échangé pendant quelques mois avec lui en lui disant qu'il allait devenir célèbre parce qu'il avait trouvé la solution exacte qui décrivait l'accélération cosmique. Il n'avait jamais pensé à cela. En bon Anglais il avait écrit dans son article :

At this point it becomes clear that the universe I am considering has no practical relation to the one we live in. Indeed, what I am writing may be called science fantasy, and the busy reader is fully entitled to turn the page. My reason for continuing is to see whether the properties of the hypothetical universe suggest why the real universe contains only positive mass. My intention is well-summarized by Einstein's metaphorical phrase, "What interests me is whether God had any choice in the creation of the world."

Ce qui donne :

*Au stade de mon exposé il devient clair que l'univers que je considère n'a aucun rapport avec celui dans lequel nous vivons. Ce que j'écris peut être considéré comme de la science fiction et un lecteur très occupé sera entièrement fondé à abandonner cette lecture.*

*Mon but est de continuer à voir si les propriétés de cet univers hypothétique pourraient expliquer pourquoi le véritable univers n'est constitué que de masses positives. Mes intentions sont bien résumées par la phrase métaphorique d'Einstein :*

« Ce qui m'intéresse est de savoir si Dieu, quand il a créé le monde, disposait vraiment de choix ».

Mais Bonnor est décédé en 2015.

Pour répondre à la lettre de Damour, j'ai trouvé une première dérivation Lagrangienne que j'ai publiée en 2015, mais qui n'a pas retenu son intérêt. Ceci étant, elle débouchait sur le système :

(63)

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2}R^{(+)}g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left[ T_{\mu\nu}^{(+)} + \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g^{(+)}}} T_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2}R^{(-)}g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[ \sqrt{\frac{g^{(+)}}{g^{(-)}}} T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

Le lien avec les deux formulations devient clair si on écrit les deux métriques sous leur forme « Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker ». Ce sont simplement les formes qu'acquière des métriques Riemaniennes, de signature (+ - - -) quand on opte pour les symétries (Adler, Schiffer et Bazin, page 409) :

- Dépendance par rapport au temps (à la variable chronologique  $x^0$ )
- Homogénéité, isotropie.

(64)

$$ds^{(+2)} = dx^{02} - (a_{(x^0)}^{(+)})^2 \left[ \frac{du^2 + u^2 d\theta^2 + u^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}{[1 + (k^{(+)}/4)u^2]^2} \right]$$

$$ds^{(-2)} = dx^{02} - (a_{(x^0)}^{(-)})^2 \left[ \frac{du^2 + u^2 d\theta^2 + u^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}{[1 + (k^{(-)}/4)u^2]^2} \right]$$

Les déterminants de ces deux métriques donnent :

$$(65) \quad \sqrt{-g^{(+)}} = \frac{a^{(+3)} u^2 \sin \theta}{[1 + (k^{(+)}/4)u^2]^3} \quad \sqrt{-g^{(-)}} = \frac{a^{(-3)} u^2 \sin \theta}{[1 + (k^{(-)}/4)u^2]^3}$$

Pour recoller avec la formulation précédente cela implique que les indices de courbure des deux secteurs soient égaux :  $k^{(+)} = k^{(-)} = k$

Je pensais à modifier de nouveau ce modèle en faisant jouer, non deux masses, positives et négatives, mais quatre, les deux autres étaient également de signes opposées, mais imaginaires pures. Un sacré projet, selon lequel ces quatre masses auraient été indifférenciées à l'origine mais, au fil d'une instabilité, chacune auraient pris son rôle,

ceci expliquant au passage cette dissymétrie cosmique foncière<sup>3</sup>, affectant les quatre secteurs. Cela devrait m'amener, je pense, à reformuler cette géométrie dans un contexte complexe, ce qui ne semblait guère facile a priori. Un formalisme qui devait déboucher sur des fluctuations conjointes des métriques, se traduisant par des fluctuations de la loi de Hubble, dont l'isotropie n'est qu'un voeu pieux . Mais, disons que j'avais quelques pistes.

C'est là que la lettre de Damour m'a contraint à régler ce petit problème de dérivation covariante, de satisfaction des égalités de Bianchi.

Ca a été assez vite vu. Voilà le résultat :

(66)

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2}R^{(+)}g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left[ T_{\mu\nu}^{(+)} + \varphi \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g^{(+)}}} T_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2}R^{(-)}g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[ \varphi \sqrt{\frac{g^{(+)}}{g^{(-)}}} T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

où  $\varphi$  est cette fois la matrice :

(67)

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors ce bête problème de mathématique disparaît.

Tout le reste c'est pareil, les résultats, les confirmations avec les observations. Finalement, Damour m'a rendu service en me contraignant à régler cette histoire, qui traînait depuis des années, mais que j'avais la flemme de traiter. Janus est un tel chantier. Au passage a émergé une dérivation Lagrangienne améliorée.

J'ai soumis cela à une revue à comité de lecture et après quelques échanges avec le referee, ça a été accepté. J'ai intitulé l'article, que j'ai mis également en annexe de ce pdf :

*Cohérence physique et mathématique du Modèle Cosmologique Janus*

J'ai envoyé l'article à Damour, à titre de réponse à sa lettre recommandée avec accusé de réception. Pour essayer de détendre l'atmosphère j'ai joint une boîte de calissons. Espérons que ça fera effet.

---

<sup>3</sup> Qui échappe à l'Allemande Sabine Hossenfelder



A partager équitablement entre les trois coauteurs du rapport IHES sur Janus :



Thibaud Damour



Luc Blanchet



Nathalie Deruelle

Je lui ai reformulé au passage ma demande de pouvoir présenter ça à l'Institut des Hautes Etudes Scientifique, où il est « Monsieur Cosmologie ».

Ceci étant, essayons d'apporter quelques explications pour les lecteurs de ce pdf à propos de la dérivation Lagrangienne du modèle Janus.

Vous avez bien compris qu'à chaque fois qu'on aborde un problème de Relativité Général c'est à travers des hypothèses de symétrie. Il y en a deux.

Soit on opte pour :

- Dépendance par rapport au temps (à la variable chronologique  $x^0$ )
- Homogénéité, isotropie.

Et on construit une solution instationnaire. Les formes (FLRW) ont été données plus haut.

Soit on opte pour :

- Indépendance par rapport au temps (à la variable chronologique  $x^0$ )
- Symétrie sphérique ( par rapport au groupe  $O(3)$  ).

Les métriques prennent alors la forme ( Adler, Schiffer et Bazin page )

$$(68) \quad ds^{(+2)} = e^{\nu^{(+)}} dx^0{}^2 - e^{\lambda^{(+)}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$(69) \quad ds^{(-2)} = e^{\nu^{(-)}} dx^0{}^2 - e^{\lambda^{(-)}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Il existe une troisième classe de solution où on se limite à une symétrie  $O(2)$ , et qui donne la métrique de Kerr ( « axisymétrie », ce qui est un mot trompeur qui suggère l'existence d'un « axe » ). On renverra cela à plus tard.

A partir des métriques (68) et (69) on calcule les composantes des tenseurs Ricci  $R_{\mu\nu}^{(+)}$  et  $R_{\mu\nu}^{(-)}$  correspondants. Ce qui se traduit in fine par de bêtes matrices diagonales.

On se place, comme le fait Damour, dans le cas où  $T_{\mu\nu}^{(-)} = 0$  et on écrit :

$$(70) \quad T^{(+)\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} \rho^{(+)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p^{(+)}}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p^{(+)}}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p^{(+)}}{c^2} \end{pmatrix}$$

Alors, ça n'est plus que du calcul.

Depuis des décennies je réutilise du vieux matériel. Là c'est à recherche dans le Adler Schiffer et Bazin aux pages 462 à 472. Les calculs sont simplement dupliqués. On a les métriques exprimées dans leurs deux formes. Ajouter des indices (+) et (-) :

$$(70) \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Des coefficients des tenseurs de Ricci sont :

$$(71) \quad R_{00} = e^{\nu-\lambda} \left[ -\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} \right] \quad R_0^0 = -e^{-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'}{r} \right)$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} & R_1^1 &= -e^{-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right) \\
R_{22} &= e^{-\lambda} \left[ 1 + \frac{\nu'r}{2} - \frac{\lambda'r}{2} \right] - 1 & R_2^2 &= -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} \right) + \frac{1}{r^2} \\
R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta & R_3^3 &= R_2^2
\end{aligned}$$

Et le scalaire de Ricci :

$$(72) \quad R = R^\mu_\mu = e^{-\lambda} \left[ 2 \left( -\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} \right) - \frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{2}{r^2} - \frac{2\nu'}{2r} + \frac{2\lambda'}{2r} \right] + \frac{2}{r^2}$$

Tout cela avec les indices (+) et (-).

On donne aux métriques extérieures les formes :

$$(75) \quad ds^{(+2)} = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dx^{\circ 2} - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$(76) \quad ds^{(-2)} = \left( 1 + \frac{2m}{r} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{2m}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

en se débrouillant pour que ces métriques se raccordent avec les solutions intérieures.

Je ne vais pas détailler les calculs. Cela donne :

$$(77) \quad p^{(+)\prime} = - \frac{(\rho^{(+)} + p^{(+)} / c^2) (m(r) + 4\pi G p r^3 / c^4) c^2}{r(r - 2m(r))}$$

$$(78) \quad p^{(+)\prime} = - \frac{(\rho^{(+)} + p^{(+)} / c^2) (m(r) + 4\pi G p r^3 / c^4) c^2}{r(r + 2m(r))}$$

On a deux conditions de linéarisation. La pression c'est une densité d'énergie par unité de volume. On peut écrire  $\rho^{(+)} c^2 + p^{(+)}$  et il est alors clair que le second terme est négligeable devant le premier. Par ailleurs on a :

$$(79) \quad 2m(r) = \frac{G}{c^2} \frac{8\pi r^3 \rho^{(+)}}{3} = \frac{2GM(r)}{c^2}$$

C'est le rayon de Schwarzschild calcul à partir de la masse  $M(r)$  contenue dans une sphère de rayon  $r$ , inférieur au rayon de l'étoile. Si le champ est faible cela implique :

$$(80) \quad r \gg 2m(r)$$

Au résultat on obtient la même équation :

$$(81) \quad p^{(+)} = - \frac{4\pi G \rho^{(+)} r}{3}$$

Qui exprime que la force de pression, à l'intérieur de l'étoile, équilibre la contrainte d'origine gravitationnelle. Ce sont les conditions qui règnent à l'intérieur de la Terre. Appelons  $\Psi$  le potentiel d'où dérive la force de gravité. Il est solution de l'équation de Poisson, écrire en coordonnées radiales :

$$(82) \quad \frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Psi}{dr} = 4\pi G \rho^{(+)}$$

qui a pour solution :

$$(83) \quad \Psi = \frac{4\pi G \rho^{(+)} r^2}{3}$$

Le champ gravitationnel est

$$(84) \quad -\frac{d\Psi}{dr} = - \frac{4\pi G \rho^{(+)} r}{3}$$

Il est nul au centre de la Terre, puis croît proportionnellement à la distance au centre, jusqu'à la surface terrestre. Au delà il décroît en  $1/r^2$

En écrivant que ce champ contrebalance la force de pression on retrouve l'équation (81)

En poursuivant ce calcul, directement inspiré du Adler Schiffer et Bazin, on obtient l'expression des métriques :

(85)

$$ds^{(+2)} = \left[ \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_s^2}{\hat{R}^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}} \right]^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

(86)

$$ds^{(-2)} = \left[ \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{r_s^2}{\hat{R}^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{r^2}{\hat{R}^2}} \right]^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{\hat{R}^2}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

qu'il faut interpréter sous leurs formes linéarisées :

(87)

$$(87) \quad ds^{(+2)} = \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{r_s^2}{\hat{R}^2} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{\hat{R}^2} \right) c^2 dt^2 - \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{r_s^2}{\hat{R}^2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{\hat{R}^2} \right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$(88) \quad ds^{(-)2} = \left( 1 + \frac{3 r_s^2}{2 \hat{R}^2} - \frac{1 r^2}{2 \hat{R}^2} \right) c^2 dt^2 - \left( 1 - \frac{3 r_s^2}{2 \hat{R}^2} + \frac{1 r^2}{2 \hat{R}^2} \right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

En permutant ces deux métriques on décrit une situation inverse où la géométrie du secteur positif, le nôtre, est influencée par la présence d'un conglomérat de masse négatif. On obtient alors des géodésiques divergentes, et un effet de lentille gravitationnelle négatif, qui correspond au Great Repeller. Il devient alors possible d'envisager de calculer la réduction de luminosité de galaxies situées à l'arrière plan, lorsque leur lumière se trouve diffractée à la traversée de tels objets.

Il nous reste à regarder cette histoire de dérivation Lagrangienne.

On considère les deux matrices diagonales :

$$(89) \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Et on introduit cette nouvelle action Janus :

$$(89) \quad S = \int_{D4} \left[ I R^{(+)} \sqrt{-g^{(+)}} + \varphi R^{(-)} \sqrt{-g^{(-)}} - \chi (I + \varphi) L^{(+)} \sqrt{-g^{(+)}} + \chi (I + \varphi) L^{(-)} \sqrt{-g^{(-)}} \right] d^4x$$

On introduit cette « bi-variation » des deux métriques :

On introduit cette « bi-variation »  $(\delta g_{\mu\nu}^{(+)}, \delta g_{\mu\nu}^{(-)})$  des deux métriques en tenant compte du fait que  $I\varphi = \varphi$  et  $\varphi\varphi = I$  :

$$\delta \int_{D4} \left[ R^{(+)} \sqrt{-g^{(+)}} \right] d^4x = \int_{D4} \left( R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} \right) \sqrt{-g^{(+)}} \delta g^{(+)\mu\nu}$$

$$\delta \int_{D4} \left[ R^{(-)} \sqrt{-g^{(-)}} \right] d^4x = \int_{D4} \left( R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} \right) \sqrt{-g^{(-)}} \delta g^{(-)\mu\nu}$$

$$\delta \int_{D4} \left[ L^{(+)} \sqrt{-g^{(+)}} \right] d^4x = \int_{D4} T_{\mu\nu}^{(+)} \sqrt{-g^{(+)}} \delta g^{(+)\mu\nu} d^4x$$

$$\delta \int_{D4} \left[ L^{(-)} \sqrt{-g^{(-)}} \right] d^4x = \int_{D4} T_{\mu\nu}^{(-)} \sqrt{-g^{(-)}} \delta g^{(-)\mu\nu} d^4x$$

Puis on reprend l'hypothèse introduite dans la publication de 2015

$$(90) \quad \delta g^{(-)\mu\nu} = -\delta g^{(+)\mu\nu}$$

Et on obtient le nouveau système Janus avec son coefficient matriciel. Toutes les métriques évoquées, sous leur forme linéarisées, satisfont cette relation, qui met en jeu le principe de Mach.

*Mais, comme dirait Kipling, ceci est une autre histoire ...*

Thibault Damour  
IHES, Bures-sur-Yvette,  
7 Janvier 2019

à Jean-Pierre Petit, BP 55, 84122 Pertuis

Copies: Je me réserve le droit d'envoyer des copies de cette lettre à toutes les personnes que vous citez sur votre site, dans vos vidéos, et dans vos lettres, ainsi qu'à toute personne s'intéressant au "modèle Janus".

**Objet: "modèle Janus".**

Monsieur,

J'ai bien reçu votre lettre du 7 décembre 2018. En revanche je n'ai pas souvenir d'avoir reçu (précédemment) de vous une réponse aux objections et critiques que je vous avais communiquées dans ma lettre du 12 mars 2014, écrite après réception des prépublications de vos articles récents, et notamment: J. P. Petit. et G. d'Agostini, "Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy", *Astrophys. Space Sci* DOI 10.1007/s10509-014-2106-5); et J. P. Petit, et G. d'Agostini, "Cosmological bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe". *Mod. Phys. Lett. A* Vol. 29 (no 34) (2014) 145082.

La réception de votre lettre m'a poussé à regarder de plus près la structure et les conséquences des équations de champ de ce que vous appelez "modèle Janus". J'ai en particulier poursuivi plus en détail les raisonnements et arguments que je vous avais indiqués dans ma lettre de 2014. J'ai ainsi démontré que le "modèle Janus" était *physiquement (et mathématiquement) incohérent*. Cette incohérence est particulièrement manifeste dans la limite quasi-newtonienne, où le "modèle Janus" implique que la matière ordinaire doit, à la fois, s'auto-attirer et s'auto-repousser gravitationnellement. J'ai posté mes raisonnements, et leurs conclusions, sur ma page web (lien "Sur le "modèle Janus de J. P. Petit" sur <http://www.ihes.fr/~damour>).

Vous comprendrez, après lecture, qu'il ne saurait être question de vous inviter à donner un séminaire à l'IHES, car vous n'avez pas de théorie cohérente, mathématiquement et physiquement bien définie, à présenter. [Notez d'ailleurs au passage que je ne suis pas, comme vous l'écrivez, "responsable du séminaire de cosmologie à l'IHES". Il n'y a en fait pas de séminaire régulier de cosmologie à l'IHES.]

Bien à vous,



Thibault Damour  
Institut des Hautes Études Scientifiques  
35, route de Chartres  
91440 Bures-sur-Yvette (France)

P.S.: Quand j' ai évoqué le nom de Souriau à Genève (le 5 novembre 2018) en répondant à une question concernant vos travaux, je faisais allusion au manque d'une dérivation Lagrangienne pouvant (éventuellement) assurer la cohérence du "modèle Janus". Il est facile de voir que la dérivation variationnelle donnée dans l'article de Sabine Hossenfelder (PRD 78, 044015, 2008) est mathématiquement invalide.

Jean-Pierre Petit  
BP 55 84122 Pertuis

Le 12 mars 2019  
A . Thibaud Damour  
IHES, Bures sur Yvette  
Route des Chartres

Copie à G.D'Agostini et N.Debergh

Cher Collègue,

Ne croyez-vous pas qu'il serait temps de détendre un peu l'atmosphère ?

Quand j'ai reçu votre lettre recommandée du 7 janvier 2019 il se trouve que je venais de résoudre le problème que vous soulevez et dont je connaissais l'existence de longue date. J'avais donc entrepris de publier ce nouveau travail et étais en contact avec le referee de la revue Progress in Physics. J'ai donc attendu l'acceptation de notre nouvel article intitulé

*Physical and mathematical consistency of the Janus Cosmological Model*

qui lève les critiques que vous avez formulées, pour vous répondre. Vous trouverez la copie de ce papier, jointe à mon envoi. Comme vous le verrez, c'était assez peu de chose et amène à une légère modification des seconds membres des équations Janus, ce qui ne change rien à ce qui a été déjà obtenu et publié depuis cinq ans, vis à vis de l'accord avec la dizaine de données d'observations disponible.

Je réédite donc ma demande de présentation de nos travaux à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques.

Comme vous dite que vous avez envoyé copie de votre courrier « à toutes les personnes s'intéressant au modèle Janus » Seriez-vous assez aimable pour leur faire suivre la copie du présent courrier, ainsi que celle de notre article, dont vous pourriez au passage faire état dans votre page du site de l'IHES, à la suite du rapport que vous avez publié, concernant nos travaux. .

Je vous ai vu revenir sur « cette longue lettre que vous m'avez envoyée » en 2015, où vous repreniez les éléments de votre propre travail sur la « massive bigravity », qui traite de deux « branes » interagissant à l'aide de « gravitons dotés d'une masse ». Comme je vous l'avais dit à l'époque, le modèle Janus n'a vraiment rien à voir avec cette approche, qui par ailleurs ne produit rien qui puisse être relié à des observations.

Nathalie Debergh se joint à moi pour reformuler sa demande de présentation à l'IHES du développement du modèle dans le cadre de la Mécanique Quantique, c'est à dire en ouvrant vers l'étude des états d'énergie négative.

Sincèrement vôtre

# Physical and mathematical consistency of the Janus Cosmological Model (JCM)

J.P.Petit<sup>1</sup>, G.D'Agostini<sup>2</sup>, and N.Debergh<sup>3</sup>  
Manaty Research Group

<sup>1</sup> jean-pierre.petit@manaty.net

<sup>2</sup> gilles.dagostini@manaty.net

<sup>3</sup> nathalie.debergh@manaty.net

The Janus Cosmological Model is based on a system of two coupled field equations. It explains the nature of dark matter and dark energy with negative mass and without the runaway paradox that arises in general relativity. We first recall how this system was built, from a simple Newtonian toy model to a relativistic bimetric theory, that is now improved in order to fulfill mathematical constraints and set up on a Lagrangian derivation.

## 1 The long genesis of the Janus Cosmological Model

Roots of the Janus Cosmological Model are like assembling different pieces of a puzzle. There are indeed several starting points for this bimetric approach. The first is the missing primordial antimatter, a problem solved in 1967 by Andrei Sakharov in [1] with the representation of the universe not as a single entity born from the beginning of time, but two spacetimes with opposite arrows of time communicating only through their common initial singularity, forming a "twin universe" in complete CPT symmetry, as represented in the didactic Figure 1.

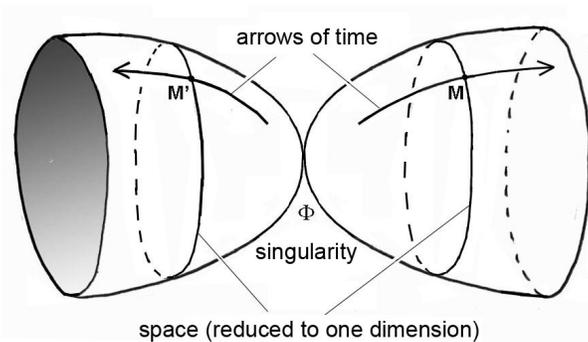


Fig. 1: 2D representation of Sakharov's twin universe model

Then, the first step is to consider that these two entities can interact gravitationally, which is equivalent to folding the object of Figure 1 on itself as in Figure 2.

In 1977, a first modeling using non relativistic theoretical tools is attempted in [2] and [3] with two Boltzmann equations coupled with Poisson's equation. We then realize Sakharov's seminal idea of a complete CPT symmetry between these two entities, an idea also independently used by other authors recently citeBOYLE2018. Such work suggests that a profound paradigm shift involving geometrical grounds should be performed.

Early 1990's, we explore, through computer simulations, what could emerge from interaction laws associated with a mix of positive and negative point masses, according to the following assumption.

Interactions laws:

- Like masses attract, according to Newton's law.
- Unlike masses repel, according to "anti-Newton".

(1)

At this stage, it is only a toy model. In 1992, first 2D simulations of two populations with opposite mass and same absolute value of density show a separation of the two entities, as shown in [5], a result reproduced below in Figure

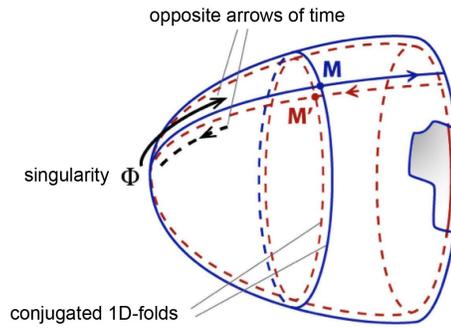


Fig. 2: Sakharov's model with "conjugate folds"

3.

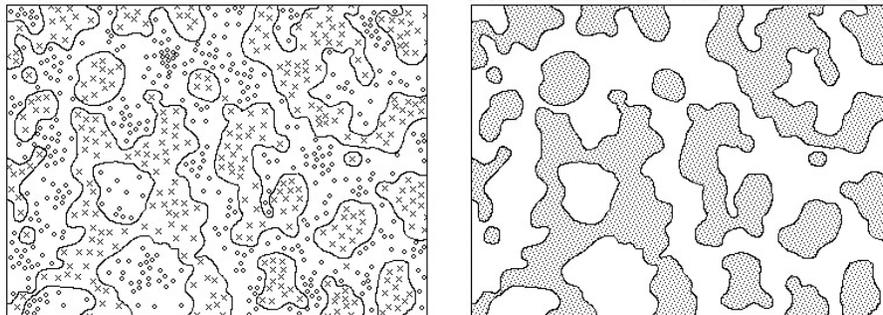


Fig. 3: Flocculation and percolation phenomena between two populations of opposite mass and same overall density. Right: Showing the optically-visible positive mass matter only

The purpose was to account for the large-scale structure of the universe, which admittedly wasn't a tight fit with these early experiments. But if we now introduce asymmetry in the two mass densities, taking a greater density for the negative mass species, then this population has a shorter Jeans time, hence it is the first to coalesce into conglomerates, by gravitational instability.

$$\text{if } |\rho^{(-)}| \gg \rho^{(+)} \Rightarrow t_{j^{(-)}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G |\rho^{(-)}|}} \ll t_{j^{(+)}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G \rho^{(+)}}} \quad (2)$$

Following simulations confirm this second hypothesis as they produce an evolution of the positive mass distribution into a large-scale structure with big negative mass conglomerates (optically invisible) repelling the positive mass matter in the remnant space around them as shown in [6], a decisive result reproduced below in Figure 4, this time in very good agreement with the observation of the lacunar, foam-like structure of the universe, where galaxies, clusters and superclusters are organized as a web of filaments, walls and nodes distributed around giant repulsive cosmic voids.

Same approach but different boundary conditions in [7], reproduced in Figure 5.

Such a scenario also produces, in 3D, a mechanism helping galaxy formation along. Indeed, after recombination, if large volumes of gas can coalesce into giant conglomerates, then a problem arises: how to dissipate such enormous gravitational energy transformed into heat? Considering an object of radius R, the amount of energy collected varies according to  $R^3$  while the surface of the heatsink varies as  $R^2$ . Therefore, larger masses have a more important cooling time. But the constitution of the large-scale structure suggested by these simulations leads to a compression of the positive mass which distributes according to walls (as observed) that are actually sandwiched

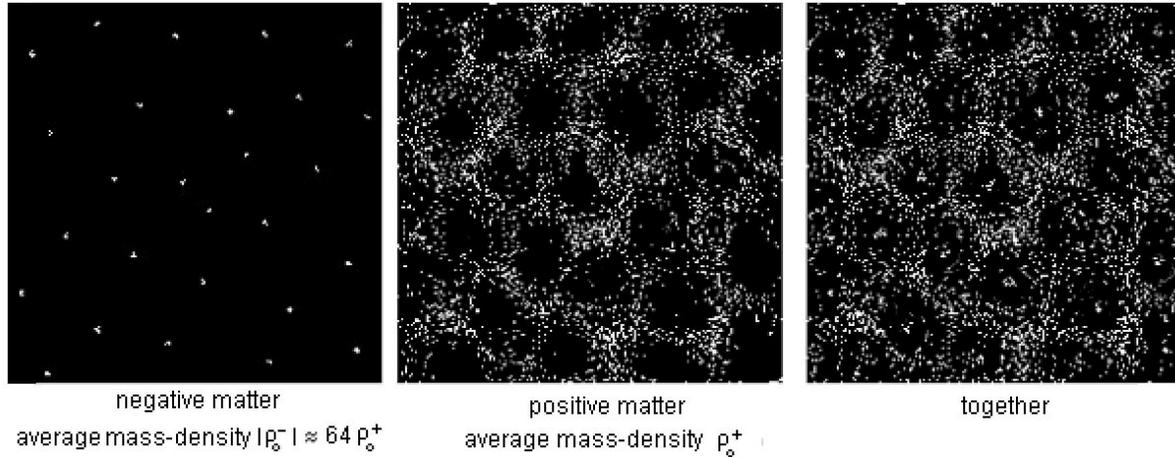


Fig. 4: Result of a 2D large-scale structure simulation [6]

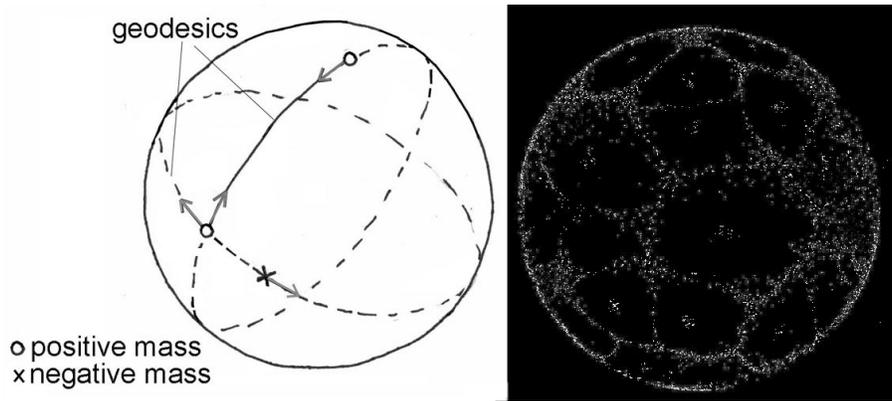


Fig. 5: Result of a 2D large-scale structure simulation on a 2-sphere [7]

between two repulsive conglomerates of negative mass. A strong compression of the positive mass occurs in such planar structures, which are optimal for a quick radiative dissipation of energy, as explained in [6].

Besides 2D simulations, an effective confinement of galaxies despite their high peripheral velocity is analytically demonstrated using an exact solution of two Vlasov equations coupled with Poisson’s equation, using the methodology exposed in [5]. The flat rotation curve obtained from such a solution, made possible by the repulsive effect of the surrounding negative mass, has been shown for the first time in [6], a curve reproduced in Figure 6. It is worth noting that such a typical rotation curve has been similarly obtained more recently using the same repulsive action of a negative mass distribution around galaxies, but from 3D computer simulations made by an independent researcher[8].

Using the exact solution of the analytical set of two Vlasov equations coupled with Poisson’s equation (image of a 2D galaxy confined by a repulsive negative mass environment), we show in numerical simulations that the rotational motion of the galaxy generates a good-looking barred spiral structure in a few turns (1992 DESY results, published in [6] and [7]).

In order to progress beyond a simple toy model that opens up interesting prospects thanks to the various above-mentioned positive results, it was still necessary at that time to derive interaction laws ?? from a coherent mathematical formalism. The introduction of negative mass in cosmology had been considered as soon as the 1950s,

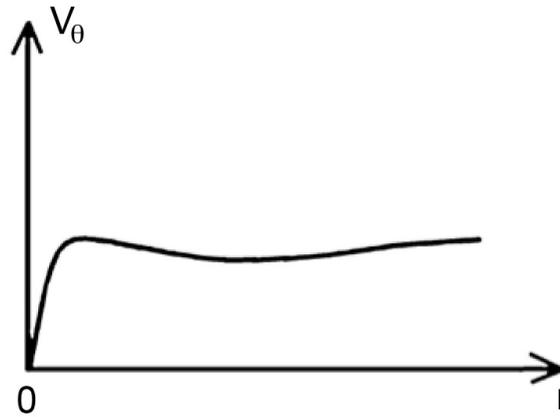


Fig. 6: Flat rotation curve of a galaxy surrounded by a negative mass distribution [6]

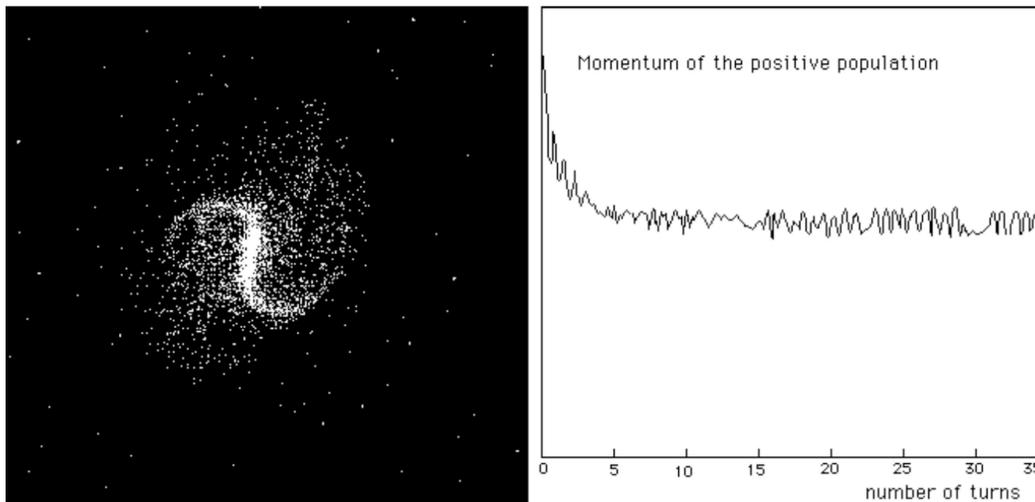


Fig. 7: 2D barred spiral structure [6][7]

using general relativity, defined by the well-known Einstein field equations which may be written, with a zero cosmological constant:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = +\chi T_{\mu\nu} \tag{3}$$

Let's notice that Einstein's equation describes the motion of point masses embedded in a given mass-energy field  $T_{\mu\nu}$  along geodesics that derive from a single metric  $g_{\mu\nu}$ . Then, one gets Bondi's result from [9]:

Interactions laws with a single metric: (4)

- Positive masses attract everything.
- Negative masses repel everything".

Which inevitably produce the preposterous "runaway motion" paradox (see Figure 8), a term coined by Bonnor in [10].

Nonetheless, a few authors (Farnes [8], Chardin [11]) still consider that it is possible to introduce negative mass in cosmology keeping the general relativity framework, hence putting up with such phenomenon; despite the fact

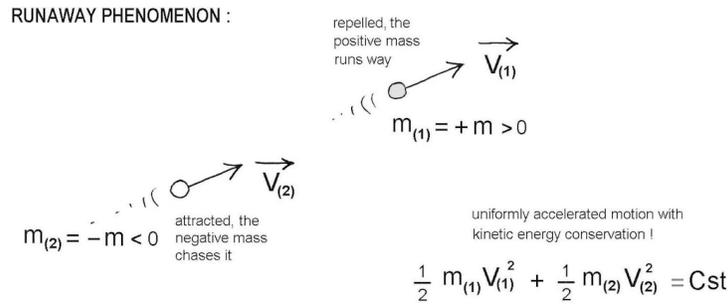


Fig. 8: Runaway motion in general relativity

that the runaway motion has been associated with the possibility of perpetual motion machines since the 1950s, as discussed by Gold with Bondi, Bergmann and Pirani in [12].

On the contrary, from 1995 in [13] we propose a bimetric description of the universe with two coupled metrics and which produce trajectories along their own geodesics, for positive and negative mass particles, respectively. Then, the classical Schwarzschild solution allows, by simply reversing the integration constant, to get trajectories suggesting a gravitational repulsion of positive masses by a negative mass, and vice versa:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} - r^2 d\theta^2 - \sin^2\theta d\varphi^2 \tag{5}$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{2GM}{rc^2}} - r^2 d\theta^2 - \sin^2\theta d\varphi^2 \tag{6}$$

Exploiting this idea, we introduce the concept of negative (diverging) gravitational lensing in the same paper [13]. Considering that a gap within a negative mass distribution is equivalent to a positive mass concentration, we suggest to attribute the strong gravitational lensing effects, observed in the vicinity of galaxies and galaxy clusters, not to a dark matter halo made of positive mass, but instead to their negative mass environment.

From 1994, we also suggest in [5] that such a bimetric description could result from the combination of two Lagrangian densities, due to two Ricci scalars  $R^{(+)}$  and  $R^{(-)}$ . In 2001 [6], we proposed for the first time a system of two coupled field equations, which can be written as:

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = +\chi \left[ T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)} \right] \tag{7}$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[ T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)} \right] \tag{8}$$

whose purpose was to account for the postulated interaction laws ???. Indeed, we make such laws emerge from a dual Newtonian approximation of this system of two coupled equations. Depending locally on the type of dominant species in a given region of space, equations with no RHS produce solutions of type 39 or 40.

Aforementioned results of simulations showed that an asymmetry in the mass densities of the positive vs negative mass species is required to account for observations of the large-scale structure of the universe. Such density asymmetry can be caused, not because of a larger quantity of negative mass, but if the two space gauge factors  $a^{(+)}$  and  $a^{(-)}$  are different. Alas, at this level it is impossible to produce a time-dependent solution with  $a^{(+)} \neq a^{(-)}$ . Inconsistency becomes inevitable when FRLW metrics are introduced in the two field equations: similarly to Friedmann solutions, they produce a couple of differential equations in  $a^{(+)}$ ,  $a'^{(+)}$ ,  $a''^{(+)}$  on one hand, and in  $a^{(-)}$ ,  $a'^{(-)}$ ,  $a''^{(-)}$  on the other. In the calculation based on Einstein's equations, compatibility between two equations

leads to the relation  $\rho a^3 = cst$  in the matter-dominated era, which expresses mass-energy conservation. In the bimetric framework of the Janus model based on the two coupled equations 7 and 8, such compatibility reduces the time-dependent solution to  $a^{(+)} = a^{(-)}$ .

Still in the same 2001 paper [6][6], we establish the connection between Sakharov's seminal work about two universes with opposite arrows of time, and negative gravity, using dynamical group theory from [14][14], which shows that time reversal goes with energy inversion, hence mass inversion as  $-m = -E/c^2$ . We then introduce the "Janus group" to handle the electric charge in a five-dimensional spacetime:

$$\begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda, L_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{with } \lambda = \pm 1 \quad \text{and } \mu = \pm 1 \quad (9)$$

where  $L_0$  is the component of the orthochronous (forward in time) subset of the Lorentz group. It is the extension of the Poincaré group to five dimensions, which describes the existence of two different kinds of antimatter: one being C-symmetric with respect to normal matter, it has a positive mass; while the other antichronous (backward in time) antimatter is PT-symmetric and has a negative mass. Therefore, the CPT theorem has to be reconsidered, since the exclusion of negative energy states follows on from an a priori axiom in quantum field theory, which postulates that the operator T has to be antiunitary and antilinear, a hypothesis not necessarily true as shown in [15].

Sakharov's conditions in [1] states that the baryon creation rate from an excess of quarks has been faster than the antibaryon creation rate from fewer antiquarks at  $t > 0$ , but such CP violation is opposite for  $t < 0$  (the "initial singularity" triggering complete CPT reflections) thereby preserving the global symmetry of the whole universe. This allows to define the true nature of the invisible antichronous components of the universe: these are copies of antiparticles that are usually made in a lab, but with negative energy and mass, due to T-symmetry.

The invisibility of such objects is deduced from the idea that PT-symmetric antiparticles emit negative energy photons that follow null-geodesics of their own metric  $g_{\mu\nu}^{(-)}$  hence escape detection by optical instruments that are made of positive mass matter.

In 2002, Damour and Kogan in [16] situate the issue with massive bigravity theories, where bimetry covers a different approach. In such models, two branes interact using various massive gravitons (hence the name) with a mass spectrum. The authors propose a Lagrangian derivation, based on an action, which leads to a system of two coupled field equations. But such a model, although mathematically consistent, does not stand up to scrutiny as it does not provide any solution able to be confronted with observations. As it has not been further pursued, it cannot answer this question.

On the other hand, in 2008 and 2009, Hossenfelder in [17] and [18] builds her own bimetric model involving negative mass, from a Lagrangian derivation where she produces a system of two coupled field equations. This time, LHS are identical to the system (7;8) which follows on from the presence of terms  $R^{(+)}\sqrt{g^{(+)}}$  and  $R^{(-)}\sqrt{g^{(-)}}$  in the Lagrangian densities considered. Exploiting her Lagrangian derivation, she reveals the determinant ratios of the two metrics  $\sqrt{g^{(+)}/g^{(-)}}$  and  $\sqrt{g^{(-)}/g^{(+)}}$  that had already been pointed out in previous work [19] and [20]. She finally tackles two Friedmann solutions, without confronting them to observational data. Actually, although sharing many similarities, having the same kind of coupled field equations regarding negative mass, a fundamental difference remains between Hossenfelder's bimetric theory and the Janus Cosmological Model.

Indeed, Hossenfelder doubts that the second entity can have an important effect on the distribution of standard matter, qualifying the gravitational coupling between the two species as "extremely weak". This is because "for symmetry reason" she considers that the absolute values of the mass density of the two populations should be of the same order of magnitude. Such hypothesis leads to a global zero field configuration, which does not fit with observations, as she notices. Then, examination of possible fluctuations seems to be her main concern. Not perceiving that a *profound dissymmetry* is on the contrary the key to the interpretation of many phenomena, including the acceleration of the cosmic expansion, she will not develop her model further during the following

decade, focusing instead on other research topics.

Nonetheless, Hossenfelder points out a "smoking gun signal" that could highlight the existence of invisible negative mass in the universe, through the detection of diffracted light rays caused by diverging lensing, an effect previously predicted in [13]. We indeed showed from 1995 that photons emitted by high redshift galaxies ( $z > 7$ ) are diffracted by the presence of invisible conglomerates of negative mass on their path. This reduces the apparent magnitude of such galaxies, making them appear as *dwarf*, which is consistent with observations.

In 2014 in [21] we take again the system (7;8) and attempt to modify it according to:

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = +\chi \left[ T_{\mu\nu}^{(+)} + \varphi T_{\mu\nu}^{(-)} \right] \quad (10)$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[ \phi T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)} \right] \quad (11)$$

Introducing two functions  $\varphi()$  and  $\phi()$  that allow a time-dependent homogeneous and isotropic solution, so that  $a^{(+)} \neq a^{(-)}$ . This is possible by switching to the system:

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = +\chi \left[ T_{\mu\nu}^{(+)} + \left( \frac{a^{(-)}}{a^{(+)}} \right)^3 T_{\mu\nu}^{(-)} \right] \quad (12)$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[ \left( \frac{a^{(+)}}{a^{(-)}} \right)^3 T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)} \right] \quad (13)$$

We obtained such a result by assuring energy conservation, not by deriving these equations from the system proposed in [18]. From (12;13) we then build an exact solution involving a large asymmetry, so that  $|\rho^{(-)}| \gg \rho^{(+)}$ , accounting for the acceleration of the expansion of the universe. D'Agostini thereafter showed in 2018 in [?] that this exact solution is in very good agreement with latest observational data. In parallel we publish in 2015 in [23] a Lagrangian derivation based on the functional relation:

$$\delta g^{(-)\mu\nu} = -\delta g^{(+)\mu\nu} \quad (14)$$

giving the following system of two coupled field equations:

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = +\chi \left( T_{\mu\nu}^{(+)} + \sqrt{\frac{-\mathbf{g}^{(-)}}{-\mathbf{g}^{(+)}}} T_{\mu\nu}^{(-)} \right) \quad (15)$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left( T_{\mu\nu}^{(-)} + \sqrt{\frac{\mathbf{g}^{(+)}}{\mathbf{g}^{(-)}}} T_{\mu\nu}^{(+)} \right) \quad (16)$$

which is similar to Hossenfelder's system in her previous Lagrangian derivation [18], although both constructions are completely different. In our derivation, the square root in the determinant ratio of the metrics directly follows on from hypothesis (14). Let's recall that such a ratio always appears as soon as a bimetric approach is attempted, see for example [19] and [20]. Admittedly however, we cannot rule out that the system (15);(16), as well as the newer one exposed hereinbelow, can be considered as a particular case of Hossenfelder's own model.

In 2015 in [?] we extend the Janus framework to a class of solutions where the two speeds of light and , in the positive and negative sectors, are different. In 2018 in [25] we propose to evaluate the magnitude of their ratio, based on a study of the fluctuations in the CMB, which leads to the following conclusion:

$$\frac{a^{(-)}}{a^{(+)}} \simeq \frac{1}{100} \quad \frac{c^{(-)}}{c^{(+)}} \simeq \frac{1}{10} \quad (17)$$

The combination of such different space scale factors and speeds of light would allow a gain factor of 1000 in travel time, regarding a hypothetical technology making apparent FTL interstellar travel by mass inversion possible, as evoked in [?] and [26].

The paper [?] then summarizes many observational data in good agreement with features of the Janus Cosmological Model.

## 2 The 2014 JCM and the Bianchi identities

From 2014, the Janus system of two coupled field equations (15;jcm2) satisfies the Bianchi identities, either trivially when the RHS are zero, or when one considers time-dependent homogeneous and isotropic solutions. However, inconsistency appears when one tries to describe with this system a time-independent situation with a spherical symmetry, modeling a star of constant density surrounded by a vacuum. Thus, a new modification of the equation system must be considered, as explained below.

Let's consider a portion of the universe where one of the two species is absent, e.g. the negative energy species, repelled away by a local concentration of positive mass. Let's limit our analysis to the search of a time-independent solution for a spherically symmetric system, and Newtonian approximation. The corresponding system is:

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = +\chi T_{\mu\nu}^{(+)} \quad (18)$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi T_{\mu\nu}^{(+)} \quad (19)$$

Then the two metrics have the form:

$$ds^{(+2)} = e^{\nu^{(+)}} c^2 dt^2 - e^{\lambda^{(+)}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (20)$$

$$ds^{(-2)} = e^{\nu^{(-)}} c^2 dt^2 - e^{\lambda^{(-)}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (21)$$

We consider a sphere whose radius  $r_s$  is filled by matter of constant density  $\rho^{(+)}$  surrounded by vacuum. Outside of the sphere, the two metrics are:

$$ds^{(+2)} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (22)$$

$$ds^{(-2)} = \left(1 + \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{2m}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (23)$$

with:

$$m = \frac{G}{c^2} \frac{4\pi r_s^3}{3} \rho^{(+)} \quad (24)$$

We can write the stress-energy tensor as:

$$T^{(+)\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} \rho^{(+)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p^{(+)}}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p^{(+)}}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p^{(+)}}{c^2} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Where  $p^{(+)}$  is the pressure insides the star of radius  $r_s$  filled with constant density  $\rho^{(+)}$ . Equations (18) and (19) give the following differential equations:

$$p^{(+)\prime} = - \left( \rho^{(+)} c^2 + p^{(+)} \right) \frac{m(r) + 4\pi G p^{(+)} r^3 / c^4}{r(r - 2m(r))} \quad (26)$$

$$p^{(+)\prime} = + \left( \rho^{(+)} c^2 + p^{(+)} \right) \frac{m(r) + 4\pi G \rho^{(+)} r^3 / c^4}{r (r + 2m(r))} \quad (27)$$

where:

$$m(r) = \frac{G}{c^2} \frac{4\pi r^3}{3} \rho^{(+)} \quad (28)$$

After Newtonian approximation:

$$p^{(+)} \ll \rho^{(+)} c^2 \quad , \quad r \gg 2m \quad (29)$$

which gives:

$$p^{(+)\prime} = - \frac{\rho^{(+)} c^2 m(r)}{r^2} \quad (30)$$

$$p^{(+)\prime} = + \frac{\rho^{(+)} c^2 m(r)}{r^2} \quad (31)$$

So that we get a physical and mathematical contradiction, that must be cured.

### 3 Lagrangian derivation of a new JCM, as of 2019

Consider the two diagonal constant matrices:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Introduce the action:

$$S = \int_{D^4} \left[ IR^{(+)} \sqrt{-g^{(+)}} + \varphi R^{(-)} \sqrt{-g^{(-)}} - \chi (I + \varphi) L^{(+)} \sqrt{-g^{(+)}} + \chi (I + \varphi) L^{(-)} \sqrt{-g^{(-)}} \right] d^4x \quad (33)$$

Let's perform the following bivariation, taking account of  $I\varphi = \varphi$  and  $\varphi\varphi = I$

$$\delta \int_{D^4} R^{(+)} \sqrt{-g^{(+)}} d^4x = \int_{D^4} \left( R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} \right) \sqrt{-g^{(+)}} \delta g^{(+)\mu\nu} d^4x \quad (34)$$

$$\delta \int_{D^4} R^{(-)} \sqrt{-g^{(-)}} d^4x = \int_{D^4} \left( R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} \right) \sqrt{-g^{(-)}} \delta g^{(-)\mu\nu} d^4x \quad (35)$$

$$\delta \int_{D^4} L^{(+)} \sqrt{-g^{(+)}} d^4x = \int_{D^4} T_{\mu\nu}^{(+)} \sqrt{-g^{(+)}} \delta g^{(+)\mu\nu} d^4x \quad (36)$$

$$\delta \int_{D^4} L^{(-)} \sqrt{-g^{(-)}} d^4x = \int_{D^4} T_{\mu\nu}^{(-)} \sqrt{-g^{(-)}} \delta g^{(-)\mu\nu} d^4x \quad (37)$$

From a previous Lagrangian derivation [7] :

$$\delta g^{(-)\mu\nu} = -\delta g^{(+)\mu\nu} \quad (38)$$

Our goal: to set up a system of two coupled field equations providing joint solutions corresponding to Newtonian approximation. In such conditions the external metrics are:

$$ds^{(+)\prime 2} = \left( 1 - \frac{8\pi G r_s^3 \rho^{(+)}}{c^2} r \right) c^2 dt^2 - \left( 1 + \frac{8\pi G r_s^3 \rho^{(+)}}{c^2} r \right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (39)$$

$$ds^{(-)\prime 2} = \left( 1 + \frac{8\pi G r_s^3 \rho^{(+)}}{c^2} r \right) c^2 dt^2 - \left( 1 - \frac{8\pi G r_s^3 \rho^{(+)}}{c^2} r \right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (40)$$

We may consider that such metrics belong to subsets of Riemannian metrics with signature  $(+ - - -)$  which obey relationship (38). Indeed:

$$\delta g_{00}^{(+)} = -\frac{8\pi G r_s^3 \rho^{(+)}}{c^2} r \delta \rho^{(+)} = -\delta g_{00}^{(-)} \quad \delta g_{11}^{(+)} = -\frac{8\pi G r_s^3 \rho^{(+)}}{c^2} r \delta \rho^{(+)} = -\delta g_{11}^{(-)} \quad (41)$$

If we consider that (38) defines joint metrics, they obey:

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = +\chi \left( T_{\mu\nu}^{(+)} + \sqrt{\frac{-\mathbf{g}^{(-)}}{-\mathbf{g}^{(+)}}} \varphi T_{\mu\nu}^{(-)} \right) \quad (42)$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left( T_{\mu\nu}^{(-)} + \sqrt{\frac{\mathbf{g}^{(+)}}{\mathbf{g}^{(-)}}} \varphi T_{\mu\nu}^{(+)} \right) \quad (43)$$

#### 4 Back to the star model

Starting from the new joint system (42);(43) we obtain the analogous of the system (18);(19) where, in the second equation, we would replace the tensor  $T^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)}$  by  $\hat{T}_{\mu\nu}^{(+)}$ , so that:

$$\hat{T}_{00}^{(+)} = T_{00}^{(+)} = \rho^{(+)} \quad (44)$$

$$\hat{T}_{ii}^{(+)} = -T_{ii}^{(+)} \quad \text{with} \quad j = \{1, 2, 3\} \quad (45)$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \hat{T}_{\mu\nu}^{(+)} \quad (46)$$

With the joint metrics (20) and (21), inside the star, plus compatibility conditions satisfying (22) and (23) at its border  $r = r_s$  we get the following result:

$$p^{(+)\prime} = -\left(\rho^{(+)} c^2 + p^{(+)}\right) \frac{m(r) + 4\pi G p^{(+)} r^3 / c^4}{r(r - 2m(r))} \quad (47)$$

$$p^{(+)\prime} = -\left(\rho^{(+)} c^2 - p^{(+)}\right) \frac{m(r) - 4\pi G p^{(+)} r^3 / c^4}{r(r + 2m(r))} \quad (48)$$

with  $m(r)$  given by (28).

(47) is nothing but the famous Tolman-Oppenheimer-Volkoff equation.

Applying the Newtonian approximation, any inconsistency vanishes. Such equations mean that inside the star, the pressure counterbalances the gravitational pull. The geodesics are given by:

$$ds^{(+2)} = \left[ \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_s^2}{\hat{R}^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}} \right]^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (49)$$

$$ds^{(-2)} = \left[ \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{r_s^2}{\hat{R}^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{r^2}{\hat{R}^2}} \right]^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{\hat{R}^2}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (50)$$

with:

$$\hat{R}^2 = \frac{3c^2}{8\pi G \rho^{(+)}} \quad (51)$$

We linearize:

$$ds^{(+)^2} = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{r_s^2}{\hat{R}^2} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_s^2}{\hat{R}^2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (52)$$

$$ds^{(-)^2} = \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_s^2}{\hat{R}^2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{3}{2} \frac{r_s^2}{\hat{R}^2} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (53)$$

Notice that:

$$\delta g_{00}^{(+)} = -\frac{4\pi G (3r_s^3 - r^2)}{3c^2} \delta \rho^{(+)} = -\delta g_{00}^{(-)} \quad \delta g_{11}^{(+)} = -\frac{4\pi G (3r_s^3 - r^2)}{3c^2} r \delta \rho^{(+)} = -\delta g_{11}^{(-)} \quad (54)$$

fits (38).

### 5 Back to our basic assumption : $\delta g^{(-)\mu\nu} = -\delta g^{(+)\mu\nu}$

The time-dependent joint solutions presented in [21] correspond to the following FRLW metrics:

$$ds^{(+)^2} = (dx^0)^2 - a^{(+)^2} \frac{du^2 + u^2 d\theta^2 + u^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}{\left(1 + \frac{k^{(+)} u^2}{4}\right)^2} \quad (55)$$

$$ds^{(-)^2} = (dx^0)^2 - a^{(-)^2} \frac{du^2 + u^2 d\theta^2 + u^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}{\left(1 + \frac{k^{(-)} u^2}{4}\right)^2} \quad (56)$$

which give, with the single solution  $k^{(+)} = k^{(-)} = -1$  :

$$a^{(+)^2} \frac{d^2 a^{(+)}}{(dx^0)^2} - \frac{8\pi G \rho_0}{3c_0^2} = 0 \quad (57)$$

$$a^{(-)^2} \frac{d^2 a^{(-)}}{(dx^0)^2} + \frac{8\pi G \rho_0}{3c_0^2} = 0 \quad (58)$$

Whose exact parametric solutions are, for (57):

$$x^0 = \frac{4\pi G \rho_0}{3c_0^2} \left(1 + \frac{sh(2v)}{2} + v\right) \quad (59)$$

$$a^{(+)} = \frac{4\pi G \rho_0}{3c_0^2} ch^2(v) \quad (60)$$

and for (58):

$$x^0 = \frac{4\pi G \rho_0}{3c_0^2} (sh(2w) - 2w) \quad (61)$$

$$a^{(-)} = \frac{4\pi G \rho_0}{3c_0^2} (ch^2(w) - 1) \quad (62)$$

Let's compute the variations  $\delta g_{\mu\nu}^{(+)}$  and  $\delta g_{\mu\nu}^{(-)}$  under a variation  $\delta \rho_0$  of their single parameter, the dominant matter density  $\rho_0$ . The variations  $\delta g_{00}^{(+)}$ ,  $\delta g_{00}^{(-)}$ ,  $\delta g_{11}^{(+)}$ ,  $\delta g_{11}^{(-)}$  depend on the factors  $a^{(+)} \delta a^{(+)}$  and  $a^{(-)} \delta a^{(-)}$ . But we have:

$$\frac{da^{(+)}}{dx^0} = th(v) \quad \frac{d^2 a^{(+)}}{(dx^0)^2} = \frac{1}{dx^0} \left( \frac{da^{(+)}}{dx^0} \right) = \frac{3c_0^2}{4\pi G \rho_0} \frac{1}{2 ch^4(v)} \quad (63)$$

and similar equations for the second metric solution, so that  $\delta a^{(+)} / \delta \rho_0 = \delta a^{(-)} / \delta \rho_0 = 0$  which fits our fundamental relationship (38).

## 6 Conclusion

A model is never definitively fixed in time. The set of two coupled field equations first established in [9] corresponded to a first step. The present paper proposes an updated system that has been mathematically enriched to give a precise description of the matter-dominated era. In its Newtonian approximation, it provides a new insight on astrophysics, especially in galactic dynamics which no longer depends on a set of a single Vlasov equation plus Poisson but on two Vlasov equations coupled with Poisson's equation. New results in that field will be published soon.

At the present time, JCM provides:

- joint solutions  $(g_{\mu\nu}^{(+)}, g_{\mu\nu}^{(-)})$  corresponding to the functional space of Riemannian metrics of signature  $(+ - - -)$ , fitting fundamental relationship  $g_{\mu\nu}^{(+)} = -g_{\mu\nu}^{(-)}$ .
- with stationary and spherically symmetric conditions in the vacuum.
- time dependent homogeneous and isotropic solutions.

Which cover everything that can currently be confronted with observations.

To a model already compliant with many observational data [22], a physically and mathematically coherent representation of joint geometries for positive energy and mass species, in the solar system and its neighborhood, has been added. Therefore, the Janus cosmological model agrees with classical verifications of general relativity.

By reversing this situation, considering instead a portion of space where negative mass largely dominates locally, i.e. where positive mass has been repelled away so its mass density can be taken equal to zero, we obtain the first coherent theoretical description of the *Great Repeller*, which has been exposed in [26].

When photons emitted by high redshift galaxies ( $z_i7$ ) cross negative mass conglomerates in the center of big cosmic voids, in the large-scale structure of the universe, negative gravitational lensing reduces their apparent magnitude, making them appear as dwarf galaxies, which is consistent with observations.

One may argue that the Janus theory exhibiting tow coupled metrics as a “natural” hypothesis with the confidence that subsequent results would eventually corroborate the postulate. However this bimetric model is formally sustained by a specific splitting of the Riemann Tensor which yields to 2nd rank tensor field equations, as shown in [27].

## References

1. Sakharov, A. D. (January 1967). "Violation of CP invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe". JETP Letters. 5 (1): 24–26.
2. Petit, J.-P. (23 May 1977). "Univers jumeaux, énantiomorphes, à temps propre opposées" [tr. Enantiomorphic twin universes with opposite proper times]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. 263: 1315–1318.
3. Petit, J.-P. (6 June 1977). "Univers en interaction avec leurs images dans le miroir du temps" [tr. Universes interacting with their opposite time-arrow fold]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. 284: 1413–1416.
4. Boyle, L.; Finn, K.; Neil Turok, N. (21 December 2018). "CPT-Symmetric Universe". Physical Review Letters. 121, 251301. arXiv:1803.08928. doi:10.1103/PhysRevLett.121.251301.
5. Petit, J.-P. (July 1994). "The missing-mass problem". Il Nuovo Cimento B. 109 (7): 697–709. doi:10.1007/BF02722527.
6. Petit, J.-P.; Midy, P.; Landsheat, F. (June 2001). "Twin matter against dark matter". Marseille Cosmology Conference Where's the Matter? Tracing Dark and Bright Matter with the New Generation of Large Scale Surveys, Marseille, France.
7. Petit, J.-P.; d'Agostini, G. (May 2015). "Lagrangian derivation of the two coupled field equations in the Janus cosmological model". Astrophysics and Space Science. 357 (67): 67. doi:10.1007/s10509-015-2250-6.
8. Farnes, J. S. (December 2018). "A unifying theory of dark energy and dark matter: Negative masses and matter creation within a modified  $\Lambda$ CDM framework". Astronomy & Astrophysics. 620. A92. arXiv:1712.07962. doi:10.1051/0004-6361/201832898.
9. Bondi, H. (July 1957). "Negative Mass in General Relativity". Reviews of Modern Physics. 29 (3): 423–428. doi:10.1103/RevModPhys.29.423.
10. Bonnor, W. B. (November 1989). "Negative mass in general relativity". General Relativity and Gravitation. 21 (11): 1143–1157. doi:10.1007/BF00763458.
11. Chardin, G.; Manfredi, G. (December 2018). "Gravity, antimatter and the Dirac-Milne universe". General Relativity and Quantum Cosmology. 239: 45. arXiv:1807.11198. doi:10.1007/s10751-018-1521-3.

12. Bondi, H.; Bergmann, P.; Gold, T.; Pirani, F. (January 1957). "Negative mass in general relativity" in *The Role of Gravitation in Physics: Report from the 1957 Chapel Hill Conference*, Open Access Editions Epubli 2011. ISBN:978-3869319636.
13. Petit, J.-P. (April 1995). "Twin universes cosmology". *Astrophysics and Space Science*. 227 (2): 273–307. doi:10.1007/BF00627375.
14. Souriau, J.-M. (1997). "§14: A mechanistic description of elementary particles: Inversions of space and time" in *Structure of Dynamical Systems*. Progress in Mathematics. Boston: Birkhäuser. pp. 189–193. doi:10.1007/978-1-4612-0281-3\_14. ISBN 978-1-4612-6692-1. Published originally in French in *Structure des Systèmes Dynamiques*, Dunod 1970
15. Debergh, N.; Petit, J.-P.; d'Agostini, G. (November 2018). "On evidence for negative energies and masses in the Dirac equation through a unitary time-reversal operator". *Journal of Physics Communications*. 2 (11): 115012. arXiv:1809.05046. doi:10.1088/2399-6528/aaedcc.
16. Damour, T.; Kogan, I. I. (November 2002). "Effective Lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity", *Physical Review D*. 66: 104024. arXiv:hep-th/0206042. doi:10.1103/PhysRevD.66.104024
17. Hossenfelder, S. (15 August 2008). "A Bi-Metric Theory with Exchange Symmetry". *Physical Review D*. 78 (4): 044015. arXiv:0807.2838. doi:10.1103/PhysRevD.78.044015.
18. Hossenfelder, S. (June 2009). *Antigravitation*. 17th International Conference on Supersymmetry and the Unification of Fundamental Interactions. Boston: American Institute of Physics. arXiv:0909.3456. doi:10.1063/1.3327545.
19. Lightman, A. P.; Lee, D. L. (November 1973). "New Two-Metric Theory of Gravity with Prior Geometry". *Physical Review D*. 8(10): 3293. doi:10.1103/PhysRevD.8.3293.
20. Rosen, N. (December 1973). "A bi-metric Theory of Gravitation". *General Relativity and Gravitation*. 4 (6): 435–447. doi:10.1007/BF01215403.
21. Petit, J.-P.; d'Agostini, G. (December 2014). "Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy". *Astrophysics and Space Science*. 354 (2): 611. doi:10.1007/s10509-014-2106-5.
22. D'Agostini, G.; Petit, J.-P. (June 2018). "Constraints on Janus Cosmological model from recent observations of supernovae type Ia". *Astrophysics and Space Science*. 363 (7): 139. doi:10.1007/s10509-018-3365-3.
23. Petit, J.-P.; d'Agostini, G. (November 2014). "Cosmological bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe". *Modern Physics Letters A*. 29 (34): 1450182. doi:10.1142/S021773231450182X.
24. Petit, J.-P. (October 2018). "Janus Cosmological Model and the Fluctuations of the CMB". *Progress in Physics*. 14 (4): 226–229.
25. Petit, J.-P.; Debergh, N.; d'Agostini, G. (September 2018). "Negative energy states and interstellar travel". *Advanced Propulsion Workshop*. Estes Park, CO: Space Studies Institute.
26. Hoffman, Y.; Pomarède, D.; Tully, R. B.; Courtois, H. M. (January 2017). "The dipole repeller". *Nature Astronomy*. 1 (2): 0036. arXiv:1702.02483. doi:10.1038/s41550-016-0036.
27. Marquet P.(2017) "On a 4th Tensor Gravitational Theory. Progress in Physics vol. 13