Jean-Pierre Petit jppetit1937@yahoo.fr
Gilles d'Agostini dagostini.gilles@laposte.net

Etat au 29 février 2016

Solution elliptique de l'équation de Vlasov

Introduction

Equation de Vlasov

L'équation de Vlasov générale s'écrit :

$$\frac{Df}{Dt} + \overline{\mathbf{V}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \left(\overline{\mathbf{F}} - \overline{\frac{D\mathbf{c}_0}{Dt}}\right).\frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}} - \left[\!\left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}}\mathbf{V}\right]\!\right] : \left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right] = 0$$

avec la notation $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \overline{\mathbf{c}_0}.\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$

L'équation de Vlasov exprimée en fonction de la vitesse d'agitation **C** et de la vitesse moyenne $\mathbf{c_0}$ (et non pas de la vitesse absolue $\mathbf{V=c_0+C}$), s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \log f}{\partial t} + \overline{\mathbf{C}}.\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{r}} + \overline{\mathbf{c}_0}.\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{r}} + \left(\overline{\mathbf{F}} - \overline{\frac{D\mathbf{c}_0}{Dt}}\right).\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} - \left[\!\left[\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{C}\right]\!\right] : \left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right] = 0}$$

Principe pour la recherche des solutions

Le principe est le suivant :

(1) on prend une distribution f fonction des vitesses et du temps,
(2) on la substitue dans l'équation de Vlassov,
(3) on regroupe les termes en fonction des monômes des composantes de la vitesse ce qui donne autant d'équations individuelles

Recherche d'une solution

Objectif : distribution elliptique

On choisit une distribution où les vitesses forment un ellipsoïde :

$$Log\ f = Log\ B + a_R\, C_R^2 + a_q\, C_q^2 + a_p\, C_p^2$$

Où C_R est la composante sur la direction **r**, C_P, la projection sur une direction perpendiculaire à **r** et à l'axe **z** (on prend cet axe car on va travailler sur des galaxies qui tournent autour de **z**).

Expression que l'on réécrit sous la forme suivante :

$$\boxed{Log\ f = Log\ B - \frac{m}{2k\,H}\mathbf{C}^2 + a\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)^2 + \alpha\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right]^2}$$

Où **k** est le vecteur unitaire selon **z**, B, H, a et α peuvent dépendre à priori du temps et de l'espace.

Hypothèses

On va pour la suite faire les hypothèses suivantes :

(1) on se place en stationnaire : il n'y a pas de dépendance implicite en fonction du temps
(2) on va considérer une solution symétrique autour de l'axe z, rotation autour de l'axe z avec une vitesse moyenne qui est tangentielle

avec ces hypothèses, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\frac{D\mathbf{c}_0}{Dt} \equiv \cancel{\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial t}} + \overline{\mathbf{c}_0}.\left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right] = \overline{\mathbf{c}_0}.\left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right]$$

$$\overline{\mathbf{c}_0}.\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

$$\mathbf{c}_0 = \omega(\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{r}) = \omega\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}$$

Calculs et expressions utiles pour la suite

$$\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \log B}{\partial \mathbf{r}} - \frac{m}{2k}\mathbf{C}^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(\frac{1}{H}\right) + 2a\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)\mathbf{C} + 2\alpha\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right](\mathbf{C}\times\mathbf{k})$$
$$+ \frac{\partial a}{\partial \mathbf{r}}\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{r}}\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right]^2$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{m}{kH}\mathbf{C} + 2a\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)\mathbf{r} + 2\alpha\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right](\mathbf{k}\times\mathbf{r})$$

$$(\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = -y\,C_x + x\,C_y$$

$$\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right](\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} y^2\,C_x - xy\,C_y \\ -xy\,C_x + x^2\,C_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Equation de Vlasov à utiliser

L'équation utile se réduit à :

$$\boxed{\overline{\mathbf{C}}.\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{r}} + \left(\overline{\mathbf{F}} - \overline{\mathbf{c}_0\left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right]}\right).\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} - \left[\!\left[\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{C}\right]\!\right] : \left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right] = 0}$$

Elle comporte 3 termes :

(T1) : $\overline{\mathbf{C}}.\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{r}}$ va donner des termes en vitesse d'ordre 1 et d'ordre 3

(T2) : $\left(\overline{\mathbf{F}} - \overline{\mathbf{c}_0\left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right]}\right).\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}}$ va donner des termes en vitesse d'ordre 1

(T3) : $-\left[\!\left[\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{C}\right]\!\right] : \left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right]$ va donner des termes en vitesse d'ordre 2

Termes en vitesse d'ordre 3

Il faut exprimer $\overline{\mathbf{C}}.\dfrac{\partial \log f}{\partial \mathbf{r}}$ et ne garder que les termes d'ordre 3 :

$$-\frac{m}{2k}\mathbf{C}^2\overline{\mathbf{C}}.\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(\frac{1}{H}\right) + 2a\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{C} \;+\; \cancel{2\alpha\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right]\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{C}\times\mathbf{k})}$$

$$+\,\overline{\mathbf{C}}.\frac{\partial a}{\partial \mathbf{r}}\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)^2 + \overline{\mathbf{C}}.\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{r}}\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right]^2 = 0$$

On va exprimer les composantes et regrouper ensuite les monomes

$$-\frac{m}{2k}\left(C_x^2+C_y^2+C_z^2\right)\left(C_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right)+C_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right)+C_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right)\right)$$
$$+\,2a\left(C_x^2+C_y^2+C_z^2\right)\left(xC_x+yC_y+zC_z\right)$$
$$+\left(C_x\frac{\partial a}{\partial x}+C_y\frac{\partial a}{\partial y}+C_z\frac{\partial a}{\partial z}\right)\left(xC_x+yC_y+zC_z\right)^2$$
$$+\left(C_x\frac{\partial \alpha}{\partial x}+C_y\frac{\partial \alpha}{\partial y}+C_z\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)\left(-yC_x+xC_y\right)^2 \qquad = 0$$

$$-\frac{m}{2k}\left(C_x^2+C_y^2+C_z^2\right)\left(C_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right)+C_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right)+C_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right)\right)$$
$$+\,2a\left(C_x^2+C_y^2+C_z^2\right)\left(xC_x+yC_y+zC_z\right)$$
$$+\left(C_x\frac{\partial a}{\partial x}+C_y\frac{\partial a}{\partial y}+C_z\frac{\partial a}{\partial z}\right)\left(x^2C_x^2+y^2C_y^2+z^2C_z^2+2xyC_xC_y+2xzC_xC_z+2yzC_yC_z\right)$$
$$+\left(C_x\frac{\partial \alpha}{\partial x}+C_y\frac{\partial \alpha}{\partial y}+C_z\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)\left(y^2C_x^2+x^2C_y^2-2xyC_xC_y\right) \qquad = 0$$

Soit 45 termes que l'on regroupe par monome :

$$C_x^3 : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right)+2ax+x^2\frac{\partial a}{\partial x}+y^2\frac{\partial \alpha}{\partial x}=0$$
$$C_y^3 : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right)+2ay+y^2\frac{\partial a}{\partial y}+x^2\frac{\partial \alpha}{\partial y}=0$$
$$C_z^3 : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right)+2az+z^2\frac{\partial a}{\partial z}=0$$

$$C_x^2C_y : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right)+2ay+x^2\frac{\partial a}{\partial y}+2xy\frac{\partial a}{\partial x}+y^2\frac{\partial \alpha}{\partial y}-2xy\frac{\partial \alpha}{\partial x}=0$$
$$C_y^2C_x : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right)+2ax+y^2\frac{\partial a}{\partial x}+2xy\frac{\partial a}{\partial y}+x^2\frac{\partial \alpha}{\partial x}-2xy\frac{\partial \alpha}{\partial y}=0$$
$$C_x^2C_z : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right)+2az+x^2\frac{\partial a}{\partial z}+2xz\frac{\partial a}{\partial x}+y^2\frac{\partial \alpha}{\partial z}=0$$
$$C_y^2C_z : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right)+2az+y^2\frac{\partial a}{\partial z}+2yz\frac{\partial a}{\partial y}+x^2\frac{\partial \alpha}{\partial z}=0$$

$$C_z^2\, C_x : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + 2\,a\,x + z^2\frac{\partial a}{\partial x} + 2x\,z\frac{\partial a}{\partial z} = 0$$

$$C_z^2\, C_y : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + 2\,a\,y + z^2\frac{\partial a}{\partial y} + 2y\,z\frac{\partial a}{\partial z} = 0$$

$$C_x\, C_y C_z :\; 2y\,z\frac{\partial a}{\partial x} + 2x\,z\frac{\partial a}{\partial y} + 2x\,y\frac{\partial a}{\partial z} - 2x\,y\frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0$$

On ne retombe par sur les 10 équations de la thèse de JPP (les équations en U²V et UV², on se convainc rapidement que les termes ne s'annulent pas 2 à 2 car il les différences de signes sont peu nombreuses, il y a sans doute eu une annulation malencontreuse entre les termes en a et α), sauf si l'on fait tout de suite l'hypothèse que a et α ne dépendent pas de **r**.
On obtient alors :

$$C_x^3 \equiv C_z^2\, C_x \equiv C_y^2\, C_x : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + 2\,a\,x = 0$$

$$C_y^3 \equiv C_x^2\, C_y \equiv C_z^2\, C_y : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + 2\,a\,y = 0$$

$$C_z^3 \equiv C_x^2\, C_z \equiv C_y^2\, C_z : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) + 2\,a\,z = 0$$

$$C_x\, C_y C_z :\; 0 = 0$$

Faisons apparaître ρ²

$$C_x^3 \equiv C_z^2\, C_x \equiv C_y^2\, C_x : -\cancel{2x}\,\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right) + \cancel{2x}\,a = 0$$

$$C_y^3 \equiv C_x^2\, C_y \equiv C_z^2\, C_y : -\cancel{2y}\,\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right) + \cancel{2y}\,a = 0$$

$$C_z^3 \equiv C_x^2\, C_z \equiv C_y^2\, C_z : -\cancel{2z}\,\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right) + \cancel{2z}\,a = 0$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{2k}{m}a \quad \Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{2k}{m}a\,\rho^2 + cte(z^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{2k}{m}a \quad \Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{2k}{m}a\,z^2 + cte(\rho^2)$$

La solution cohérente avec l'ensemble des 2 équations, s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{T_0}\left(1 + \frac{2k\,a\,T_0}{m}\boldsymbol{r}^2\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{m}{k\,H} = \frac{m}{k\,T_0} + 2\,a\,r^2$$

En posant :

$$r_0^2 = \frac{m}{2\,a\,k\,T_0} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{T_0}{1 + \frac{r^2}{r_0^2}}$$

Si l'on revient à f :

$$Log\ f = Log\ B + a_R\, C_R^2 + a_p\, C_p^2 + a_q\, C_q^2 \equiv Log\ B - \frac{m}{2k\,H}\mathbf{C}^2 + a\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)^2 + \alpha\left[\overline{\mathbf{C}}.\left(\mathbf{k}\times\mathbf{r}\right)\right]^2$$

En tenant compte du fait que :

$$\left\|\left(\mathbf{k}\times\mathbf{r}\right)\right\|^2 = \left(\mathbf{k}\times\mathbf{r}\right)\cdot\left(\mathbf{k}\times\mathbf{r}\right) = \left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\right)\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}\right) - \left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}\right) = \mathbf{r}^2 - \boldsymbol{z}^2 = \boldsymbol{\rho}^2$$

On obtient :

$$a_R = -\frac{m}{2k\,H} + a\boldsymbol{r}^2 \qquad a_P = -\frac{m}{2k\,H} + \alpha\boldsymbol{\rho}^2 \qquad a_Q = -\frac{m}{2k\,H}$$

En posant : $\rho_0^2 = \dfrac{m}{2\,\alpha\,k\,T_0}$

$$a_R = -\frac{m}{2k\,T_0} \qquad a_P = -\frac{m}{2k\,T_0}\left(1 + \frac{\boldsymbol{r}^2}{r_0^2} - \frac{\boldsymbol{\rho}^2}{\rho_0^2}\right) \qquad a_Q = -\frac{m}{2k\,T_0}\left(1 + \frac{\boldsymbol{r}^2}{r_0^2}\right)$$

$$f = f_0 \exp\left(-\frac{m}{2k\,T_0}\left[C_R^2 + C_P^2\left(1 + \frac{\boldsymbol{r}^2}{r_0^2} - \frac{\boldsymbol{\rho}^2}{\rho_0^2}\right) + C_Q^2\left(1 + \frac{\boldsymbol{r}^2}{r_0^2}\right)\right]\right)$$

Le normalisation f_0 s'obtient par la somme sur tout l'ensemble des vitesses.

$$f_0 = n\left(\frac{m}{2\,\pi\,k\,T_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{\boldsymbol{r}^2}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{\boldsymbol{r}^2}{r_0^2} - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Termes en vitesse d'ordre 2

Il faut expliciter : $\left[\!\left[\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{C} \right]\!\right] : \left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} \right]\!\right]$

Le double produit de 2 dyadiques est égal à la trace du produit des matrices correspondantes aux dyadique.

$$\left[\!\left[\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{C} \right]\!\right] : \left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} \right]\!\right] = Tr(AB)$$

Avec

$$A = \left[\!\left[\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{C} \right]\!\right] \qquad \text{et} \qquad B = \left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} \right]\!\right]$$

$$\mathbf{c}_0 = \omega \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B = \left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} \right]\!\right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{c}_{0x}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{c}_{0y}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{c}_{0x}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{c}_{0y}}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{c}_{0x}}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{c}_{0y}}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\frac{\partial \omega}{\partial x} & x\frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega & 0 \\ -y\frac{\partial \omega}{\partial y} - \omega & x\frac{\partial \omega}{\partial y} & 0 \\ -y\frac{\partial \omega}{\partial z} & x\frac{\partial \omega}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons A :

$$A = \left[\!\left[\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{C} \right]\!\right]$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} \overline{\mathbf{C}} = -\frac{m}{kH} \mathbf{C}\overline{\mathbf{C}} + 2a\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)\mathbf{r}\overline{\mathbf{C}} + 2\alpha\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right](\mathbf{k}\times\mathbf{r})\overline{\mathbf{C}}$$

$$\equiv A = A1 + A2 + A3$$

$$A1 = -\frac{m}{kH} \begin{pmatrix} C_x^2 & C_xC_y & C_xC_z \\ C_yC_x & C_y^2 & C_yC_z \\ C_zC_x & C_zC_y & C_z^2 \end{pmatrix}$$

$$A2 = 2a\left(xC_x + yC_y + zC_z\right) \begin{pmatrix} xC_x & xC_y & xC_z \\ yC_x & yC_y & yC_z \\ zC_x & zC_y & zC_z \end{pmatrix}$$

$$A3 = 2\,\alpha \begin{pmatrix} y^2 C_x - xy\,C_y \\ -xy\,C_x + x^2 C_y \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_x, & C_y, & C_z \end{pmatrix}$$

$$= 2\,\alpha \begin{pmatrix} y^2 C_x C_x - xy\,C_y C_x & y^2 C_x C_y - xy\,C_y C_y & y^2 C_x C_z - xy\,C_y C_z \\ -xy\,C_x C_x + x^2 C_y C_x & -xy\,C_x C_y + x^2 C_y C_y & -xy\,C_x C_z + x^2 C_y C_z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{xx}B_{xx} + A_{xy}B_{yx} + A_{xz}B_{zx} & \dots & \dots \\ \dots & A_{yx}B_{xy} + A_{yy}B_{yy} + A_{yz}B_{zx} & \dots \\ \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Il faut calculer :

$$Tr(A\,B\,) = Axx\,Bxx + Axy\,Byx + Axz\,Bzx + Ayx\,Bxy + Ayy\,Byy + Ayz\,Bzy + 0$$

$$A_{xx} = -\frac{m}{kH} C_x^2 + 2\,a\,\left(x\,xC_x^2 + yx\,C_x C_y + xz\,C_x C_z\right) + 2\alpha\left(y^2 C_x^2 - xy\,C_y C_x\right)$$

$$= C_x^2\left(-\frac{m}{kH} + 2\,a\,x^2 + 2\,\alpha\,y^2\right) + C_x C_y\,2\left(a-\alpha\right)x\,y + C_x C_z\,2\,a\,x\,z$$

$$A_{yy} = -\frac{m}{kH} C_y^2 + 2\,a\,\left(x\,C_x y\,C_y + y\,C_y y\,C_y + z\,C_z y\,C_y\right) + 2\alpha\left(-xy\,C_x C_y + x^2 C_y C_y\right)$$

$$= C_y^2\left(-\frac{m}{kH} + 2\,a\,y^2 + 2\,\alpha\,x^2\right) + C_x C_y\,2\left(a-\alpha\right)x\,y + C_y C_z\,2\,a\,y\,z$$

$$A_{xy} = -\frac{m}{kH} C_x C_y + 2\,a\,\left(x\,C_x x C_y + y\,C_y x C_y + z\,C_z x C_y\right) + 2\alpha\left(y^2 C_x C_y - xy\,C_y C_y\right)$$

$$= C_x C_y\left(-\frac{m}{kH} + 2\,a\,x^2 + 2\,\alpha\,y^2\right) + C_y^2\,2\left(a-\alpha\right)x\,y + C_y C_z\,2\,a\,x\,z$$

$$A_{yx} = -\frac{m}{kH} C_y C_x + 2\,a\,\left(x\,C_x y C_x + y\,C_y y C_x + z\,C_z y C_x\right) + 2\alpha\left(-xy\,C_x C_x + x^2 C_y C_x\right)$$

$$= C_x^2\,2\left(a-\alpha\right)x\,y + C_x C_y\left(-\frac{m}{kH} + 2\,a\,y^2 + 2\,\alpha\,x^2\right) + C_x C_z\,2\,a\,y\,z$$

$$A_{xz} = -\frac{m}{kH} C_x C_z + 2\,a\,\left(x\,C_x x C_z + y\,C_y x C_z + z\,C_z x C_z\right) + 2\alpha\left(y^2 C_x C_z - xy\,C_y C_z\right)$$

$$= C_z^2\,2a\,x\,z + C_x C_z\left(-\frac{m}{kH} + 2\,a\,x^2 + 2\,\alpha\,y^2\right) + C_y C_z\,2\left(a-\alpha\right)x\,y$$

$$A_{yz} = -\frac{m}{kH} C_y C_z + 2a\left(x C_x y C_z + y C_y y C_z + z C_z y C_z\right) + 2\alpha\left(-xy C_x C_z + x^2 C_y C_z\right)$$

$$= C_z^2 2a\, y\, z + C_x C_z\, 2(a-\alpha)\, x\, y + C_y C_z\left(-\frac{m}{kH} + 2a\, y^2 + 2\alpha\, x^2\right)$$

Terme en C_x^2. Ils proviennent de Axx Bxx et Ayx Bxy

$$\left(-\frac{m}{kH} + 2a\, x^2 + 2\alpha\, y^2\right)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) + 2(a-\alpha)\, x\, y\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x} + \omega\right) = 0$$

Terme en C_y^2. Ils proviennent de Axy Byx et Ayy Byy

$$\left(-\frac{m}{kH} + 2a\, y^2 + 2\alpha\, x^2\right)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) + 2(a-\alpha)\, x\, y\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial y} - \omega\right) = 0$$

Terme en C_z^2. Ils proviennent de Axz Bzx et Ayz Bzy

$$2a\, x\, z\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) + 2a\, y\, z\left(x\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) = 0$$

Terme en $C_x C_y$. Ils proviennent de Axy Byx, AxxBxx, AyxBxy et Ayy Byy

$$\left(-\frac{m}{kH} + 2a\, x^2 + 2\alpha\, y^2\right)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial y} - \omega\right) + 2(a-\alpha)\, x\, y\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)$$
$$+\left(-\frac{m}{kH} + 2a\, y^2 + 2\alpha\, x^2\right)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x} + \omega\right) + 2(a-\alpha)\, x\, y\left(x\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) = 0$$

Terme en $C_x C_z$. Ils proviennent de Axx Bxx, AxzBzx, AyxBxy et Ayz Bzy

$$(2a\, x\, z)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) + \left(-\frac{m}{kH} + 2a\, x^2 + 2\alpha\, y^2\right)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)$$
$$+(2a\, x\, y)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x} + \omega\right) + 2(a-\alpha)\, x\, y\left(x\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) = 0$$

Terme en $C_y C_z$. Ils proviennent de Axy Byx, AxzBzx, AyyByy et Ayz Bzy

$$(2a\, x\, z)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial y} - \omega\right) + 2(a-\alpha)\, x\, y\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)$$
$$+(2a\, y\, z)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) + \left(-\frac{m}{kH} + 2a\, y^2 + 2\alpha\, x^2\right)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) = 0$$

On va utiliser le fait que ne dépend que de ρ² et z² et donc :

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\frac{\partial\rho^2}{\partial x}=2x\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\frac{\partial\rho^2}{\partial y}=2y\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\frac{\partial z^2}{\partial z}=2z\frac{\partial\omega}{\partial z^2}$$

L'équation en C_x^2 devient :

$$\left(-\frac{m}{kH}+2a\,x^2+2\alpha\,y^2\right)\cancel{2yx}\left(-\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\right)+\cancel{2xy}\,(a-\alpha)\left(2x^2\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}+\omega\right)=0$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\left(\frac{m}{kH}\cancel{-2a\,x^2}-2\alpha\,y^2\cancel{+2a\,x^2}-2\alpha x^2\right)+(a-\alpha)\,\omega=0$$

$$\frac{\partial Log\omega}{\partial\rho^2}=-\frac{(a-\alpha)}{\left(\frac{m}{kH}-2\alpha\,\rho^2\right)}$$

En se plaçant dans e cadre de la solution particulière (a et a constant dans l'espace) :

$$\frac{m}{k\,H}=\frac{m}{k\,T_0}+2\,a\,r^2$$

L'équation devient :

$$\frac{\partial Log\omega}{\partial\rho^2}=-\frac{1}{2}\frac{2(a-\alpha)}{\left(\frac{m}{k\,T_0}+2(a-\alpha)\rho^2+2\,a\,z^2\right)}=-\frac{1}{2}\frac{\partial Log\left(\frac{m}{k\,T_0}+2(a-\alpha)\rho^2+2\,a\,z^2\right)}{\partial\rho^2}$$

La solution s'écrit sous la forme :

D'où

$$\omega=\frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{m}{k\,T_0}+2(a-\alpha)\rho^2+2\,a\,z^2}}$$

Vérifions si les autres équations sont compatibles.

L'équation en C_y^2 devient :

$$\left(-\frac{m}{kH}+2a\,y^2+2\alpha\,x^2\right)\left(\cancel{2xy}\,\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\right)+\cancel{2xy}\,(a-\alpha)\left(-2y^2\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}-\omega\right)=0$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\left(-\frac{m}{kH}+\cancel{2a\,y^2}+2\alpha\,x^2\cancel{-2ay^2}+2\alpha y^2\right)-(a-\alpha)\,\omega=0$$ c'est la même

L'équation en C_z^2 ne donne rien (X-X=0).

L'équation en C_xC_y devient :

$$\left(-\frac{m}{kH}+2ax^2+2\alpha y^2\right)\left(-y2y\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}-\omega\right)+2(a-\alpha)xy\left(-y2x\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\right)$$

$$+\left(-\frac{m}{kH}+2ay^2+2\alpha x^2\right)\left(x2x\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}+\omega\right)+2(a-\alpha)xy\left(x2y\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\left(-2y^2\left(-\frac{m}{kH}+2ax^2+2\alpha y^2\right)+2x^2\left(-\frac{m}{kH}+2ay^2+2\alpha x^2\right)\right)$$

$$=-\omega\left(-\frac{m}{kH}+2ay^2+2\alpha x^2+\frac{m}{kH}-2ax^2-2\alpha y^2\right)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\left(-\frac{m}{kH}(x^2-y^2)-2ax^2y^2-2\alpha y^2y^2+2ax^2y^2+2\alpha x^2x^2\right)$$

$$=\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}(x^2-y^2)\left(-\frac{m}{kH}+2\alpha(x^2+y^2)\right)=+\omega\left(a(x^2-y^2)-\alpha(x^2-y^2)\right)$$

On retombe sur la même équation.

L'équation en C_xC_z devient :

$$(2axz)\left(-y2x\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\right)+\left(-\frac{m}{kH}+2ax^2+2\alpha y^2\right)\left(-y2z\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\right)$$

$$+(2ayz)\left(x2x\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}+\omega\right)+2(a-\alpha)xy\left(x2z\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\left(-y2x2axz+x2x(2azy)\right)$$

$$+\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\left(-y2z\left(-\frac{m}{kH}+2ax^2+2\alpha y^2\right)+x2z2(a-\alpha)xy\right)$$

$$+\omega(2azy)=0$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\left(-2ax^2+2x^2a\right)+\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\left(\frac{m}{kH}-2ax^2-2\alpha y^2+2ax^2-2\alpha x^2\right)+a\omega=0$$

$$\frac{\partial Log\omega}{\partial z^2}=-\frac{a}{\left(\frac{m}{kH}-2\alpha\rho^2\right)}$$

En se plaçant dans e cadre de la solution particulière (a et a constant dans l'espace) :

$$\frac{m}{kH}=\frac{m}{kT_0}+2ar^2$$

$$\frac{\partial Log\omega}{\partial z^2}=-\frac{a}{\left(\frac{m}{k\,T_0}+2\left(a-\alpha\right)\rho^2+2a\,z^2\right)}=-\frac{1}{2}\frac{2a}{\left(\frac{m}{k\,T_0}+2\left(a-\alpha\right)\rho^2+2a\,z^2\right)}$$

$$\frac{\partial Log\omega}{\partial z^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial Log\left(\frac{m}{k\,T_0}+2\left(a-\alpha\right)\rho^2+2a\,z^2\right)}{\partial z^2}$$

$$Log\omega=Log\left(\frac{m}{k\,T_0}+2\left(a-\alpha\right)\rho^2+2a\,z^2\right)^{-\frac{1}{2}}+cte(\rho^2)$$

$$\omega=\frac{\omega_{z0}(\rho^2)}{\left(\frac{m}{kT_0}+2(a-\alpha)\rho^2+2az^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

A recouper avec $\omega=\dfrac{\omega_{\rho 0}\left(z^2\right)}{\sqrt{\frac{m}{kT_0}+2(a-\alpha)\rho^2+2az^2}}$

Le rapport des 2 valant 1, les 2 'constantes' sont égales et donc une seule et vraie constante.

La vitesse angulaire est :

$$\boxed{\omega=\frac{\omega_0}{\left(\frac{m}{kT_0}+2a\rho^2+2(a-\alpha)z^2\right)^{\frac{1}{2}}}}$$

Vérifions avec le dernier terme que c'est pareil…
L'équation en C_yC_z devient :

$$(2axz)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial y}-\omega\right)+2(a-\alpha)xy\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)+(2ayz)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)+\left(-\frac{m}{kH}+2ay^2+2\alpha x^2\right)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)=0$$

$$-\cancel{2}\,a\,\cancel{x}\,\cancel{z}\left(2y^2\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}+\omega\right)-2\cancel{z}\cancel{2}(a-\alpha)\cancel{x}\,y^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\right)$$
$$+\cancel{2}\,a\,y\,\cancel{z}\left(2\cancel{x}\,y\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\right)+\left(-\frac{m}{kH}+2ay^2+2\alpha x^2\right)\left(\cancel{2}\,\cancel{x}\,\cancel{z}\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\right)=0$$

$$\left(\cancel{-2ay^2\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}}-a\omega\right)-2(a-\alpha)\,y^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\right)+\left(\cancel{2ay^2\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}}\right)+\left(-\frac{m}{kH}+2ay^2+2\alpha x^2\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\right)=0$$

$$2(a-\alpha)\,y^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{m}{kH}-2ay^2-2\alpha x^2\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\right)=-a\omega$$
$$\left(\frac{m}{kH}-2\alpha\rho^2\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\right)=-a\omega$$

C'est la même équation !

21 décembre 2018 :

La vitesse curculaire est :

$$V(\rho,z) = \frac{\rho\,\omega_o}{\sqrt{\frac{m}{kT_o} + 2a\rho^2 + 2(a-\alpha)z}}$$

Ca donne une contrainte sur la dérivée partielle du potentiel gravitationnelle en ro, équilibrant la force centrifuge :

$$-\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} = \rho\omega^2 = \frac{\rho\omega_o^2}{\frac{m}{kT_o} + 2a\rho^2 + 2(a-\alpha)z^2}$$

On doit pouvoir exploiter ça pour le calcul numérique du potentiel $\psi(\rho,z)$

Termes en vitesse d'ordre 1

Les termes de l'équation de Vlassov qui vont contribuer seront :

$$\overline{\mathbf{C}}.\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{r}} \text{ et } \left(\overline{\mathbf{F}} - \overline{\mathbf{c}_0 \left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right]}\right).\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}}$$

Il faut exprimer $\overline{\mathbf{C}}.\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{r}}$ et ne garder que les termes d'ordre 1, à savoir :

$$\overline{\mathbf{C}}\frac{\partial \log B}{\partial \mathbf{r}} = C_x \frac{\partial \log B}{\partial x} + C_y \frac{\partial \log B}{\partial y} + C_z \frac{\partial \log B}{\partial z}$$

$$\left(\overline{\mathbf{F}} - \overline{\mathbf{c}_0 \left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right]}\right).\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}}$$

$$\mathbf{c}_0 = \omega_{c_0}(\boldsymbol{k}\times\mathbf{r}) = \omega_{c_0}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = \omega_{c_0}\frac{\partial(\boldsymbol{k}\times\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \omega_{c_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{c}_0 \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}} = -\omega_{c_0}^2 (x, \quad y, \quad 0)$$

$$\overline{\mathbf{F}} - \overline{\mathbf{c}_0 \left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right]} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \omega_{c_0}^2 \left(x, \quad y, \quad 0 \right)$$

On peut écrire

$$\omega_{c_0}^2 (x, \quad y, \quad 0) = -\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial z}\right) avec\ \psi_0 = -\frac{1}{2}\omega_{c_0}^2 \rho^2$$

$$\overline{\mathbf{F}} - \overline{\mathbf{c}_0 \left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right]} \equiv -\overline{\frac{\partial(\psi + \psi_0)}{\partial \mathbf{r}}}$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{m}{kH}\mathbf{C} + 2a\left(\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{r}\right)\mathbf{r} + 2\alpha\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right](\mathbf{k}\times\mathbf{r})$$

$$\left[\overline{\mathbf{C}}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\right](\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} y^2 C_x - xy C_y \\ -xy C_x + x^2 C_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_0 = \omega \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{m}{kH}\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} + 2a\begin{pmatrix} xx C_x + xy C_y + xz C_z \\ xy C_x + yy C_y + yz C_z \\ xz C_x + yz C_y + zz C_z \end{pmatrix} + 2\alpha \begin{pmatrix} y^2 C_x - xy C_y \\ -xy C_x + x^2 C_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} = \begin{pmatrix} C_x\left(-\frac{m}{kH} + 2ax^2 + 2\alpha y^2\right) + C_y\, 2xy\left(a-\alpha\right) + C_z 2axz \\ C_x 2xy\left(a-\alpha\right) + C_y\left(-\frac{m}{kH} + 2ay^2 + 2\alpha x^2\right) + C_z 2ayz \\ C_x 2axz + C_y 2ayz + C_z\left(-\frac{m}{kH} + 2az^2\right) \end{pmatrix}$$

$$\left(\overline{\mathbf{F}} - \overline{\mathbf{c}_0\left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right]}\right) . \frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{\partial\left(\psi+\psi_0\right)}{\partial \mathbf{r}} \begin{pmatrix} C_x\left(-\frac{m}{kH} + 2ax^2 + 2\alpha y^2\right) + C_y\, 2xy\left(a-\alpha\right) + C_z 2axz \\ C_x 2xy\left(a-\alpha\right) + C_y\left(-\frac{m}{kH} + 2ay^2 + 2\alpha x^2\right) + C_z 2ayz \\ C_x 2axz + C_y 2ayz + C_z\left(-\frac{m}{kH} + 2az^2\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\left(\overline{\mathbf{F}} - \overline{\mathbf{c}_0\left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right]}\right) . \frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} = \\ &-C_x\left(\frac{\partial\left(\psi+\psi_0\right)}{\partial x}\left(-\frac{m}{kH} + 2ax^2 + 2\alpha y^2\right) + \frac{\partial\left(\psi+\psi_0\right)}{\partial y} 2xy\left(a-\alpha\right) + \frac{\partial\left(\psi+\psi_0\right)}{\partial z} 2axz\right) \\ &-C_y\left(\frac{\partial\left(\psi+\psi_0\right)}{\partial x} 2xy\left(a-\alpha\right) + \frac{\partial\left(\psi+\psi_0\right)}{\partial y}\left(-\frac{m}{kH} + 2ay^2 + 2\alpha x^2\right) + \frac{\partial\left(\psi+\psi_0\right)}{\partial z} 2ayz\right) \\ &-C_z\left(\frac{\partial\left(\psi+\psi_0\right)}{\partial x} 2axz + \frac{\partial\left(\psi+\psi_0\right)}{\partial y} 2ayz + \frac{\partial\left(\psi+\psi_0\right)}{\partial z}\left(-\frac{m}{kH} + 2az^2\right)\right) \end{aligned}$$

Les termes d'ordre 1 de l'équation de Vlassov

$$\overline{\mathbf{C}}\frac{\partial \log B}{\partial \mathbf{r}} + \left(\overline{\mathbf{F}} - \overline{\mathbf{c}_0\left[\!\left[\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right]\!\right]}\right) . \frac{\partial \log f}{\partial \mathbf{C}} = 0$$

donnent donc à 3 équations , en se plaçant encore dans le cadre de la solution particulière (a et a constant dans l'espace) :

$$\frac{m}{kH} = \frac{m}{kT_0} + 2ar^2 = \frac{m}{kT_0} + 2ax^2 + 2ay^2 + 2az^2$$

$$\frac{\partial \log B}{\partial x} - \frac{\partial\left(\psi+\psi_0\right)}{\partial x}\left(-\frac{m}{kT_0} - 2\left(a-\alpha\right)y^2 - 2az^2\right) - \frac{\partial\left(\psi+\psi_0\right)}{\partial y} 2xy\left(a-\alpha\right) - \frac{\partial\left(\psi+\psi_0\right)}{\partial z} 2axz = 0$$

$$\frac{\partial \log B}{\partial y} - \frac{\partial\left(\psi+\psi_0\right)}{\partial x} 2xy\left(a-\alpha\right) - \frac{\partial\left(\psi+\psi_0\right)}{\partial y}\left(-\frac{m}{kT_0} - 2\left(a-\alpha\right)x^2 - 2az^2\right) - \frac{\partial\left(\psi+\psi_0\right)}{\partial z} 2ayz = 0$$

$$\frac{\partial \log B}{\partial z} - \left(-\frac{\partial(\psi+\psi_0)}{\partial x} 2axz - \frac{\partial(\psi+\psi_0)}{\partial y} 2ayz - \frac{\partial(\psi+\psi_0)}{\partial z} \left(-\frac{m}{kT_0} - 2ax^2 - 2ay^2 \right) \right) = 0$$

Annexe : Nécessité que a et α soient constants

A priori, a et α dépendent de l'espace et par symétrie de ρ² et z².

Nous allons voir que nécessairement, a et α sont des constantes.

Reprenons les équations et remplaçons les dérivées partielles

$$\frac{\partial F(\rho^2,z^2)}{\partial x}=2x\frac{\partial F}{\partial \rho^2}\qquad \frac{\partial F(\rho^2,z^2)}{\partial y}=2y\frac{\partial F}{\partial \rho^2}\qquad \frac{\partial F(\rho^2,z^2)}{\partial z}=2z\frac{\partial F}{\partial z^2}$$

Les équations issues de l'ordre 3, s'écrivent :

$$C_x^3 : -\cancel{2x}\,\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right)+\cancel{2x}\,a+\cancel{2x}\,x^2\frac{\partial a}{\partial \rho^2}+\cancel{2x}\,y^2\frac{\partial \alpha}{\partial \rho^2}=0$$

$$C_y^3 : -\cancel{2y}\,\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right)+\cancel{2y}\,a+\cancel{2y}\,y^2\frac{\partial a}{\partial \rho^2}+\cancel{2y}\,x^2\frac{\partial \alpha}{\partial \rho^2}=0$$

$$C_z^3 : -\cancel{2z}\,\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right)+\cancel{2z}\,a+\cancel{2z}\,z^2\frac{\partial a}{\partial z^2}=0$$

Soit

$$C_x^3-C_y^3 : \frac{\partial a}{\partial \rho^2}=\frac{\partial \alpha}{\partial \rho^2}$$

$$C_x^3+C_y^3 : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right)+a+\rho^2\frac{\partial a}{\partial \rho^2}=0$$

$$C_z^3 : \quad -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right)+a+z^2\frac{\partial a}{\partial z^2}=0$$

$$C_x^2\,C_z : -\cancel{2z}\,\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right)+\cancel{2z}\,a+\cancel{2z}\,x^2\frac{\partial a}{\partial z^2}+2x\cancel{2}x\cancel{z}\,\frac{\partial a}{\partial \rho^2}+\cancel{2z}\,y^2\frac{\partial \alpha}{\partial z^2}=0$$

$$C_x^2\,C_z : -\cancel{2z}\,\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right)+\cancel{2z}\,a+\cancel{2z}\,x^2\frac{\partial a}{\partial z^2}+2x\cancel{2}x\cancel{z}\,\frac{\partial a}{\partial \rho^2}+\cancel{2z}\,y^2\frac{\partial \alpha}{\partial z^2}=0$$

$$C_y^2\,C_x : -\cancel{2x}\,\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right)+\cancel{2x}\,a+\cancel{2x}\,y^2\frac{\partial a}{\partial \rho^2}+2y\cancel{2x}\,y\frac{\partial a}{\partial \rho^2}+\cancel{2x}\,x^2\frac{\partial \alpha}{\partial \rho^2}-2y\cancel{2x}\,y\frac{\partial \alpha}{\partial \rho^2}=0$$

$$C_y^2\,C_z : -\cancel{2z}\,\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right)+\cancel{2z}\,a+\cancel{2z}\,y^2\frac{\partial a}{\partial z^2}+\cancel{2}y2y\cancel{z}\,\frac{\partial a}{\partial \rho^2}+\cancel{2z}\,x^2\frac{\partial \alpha}{\partial z^2}=0$$

$$C_z^2\,C_x : -\cancel{2x}\,\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right)+\cancel{2x}\,a+\cancel{2x}\,z^2\frac{\partial a}{\partial \rho^2}+2z\cancel{2x}\,z\frac{\partial a}{\partial z^2}=0$$

$$C_z^2\,C_y : -\cancel{2y}\,\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right)+\cancel{2y}\,a+\cancel{2y}\,z^2\frac{\partial a}{\partial \rho^2}+2z\cancel{2y}\,z\frac{\partial a}{\partial z^2}=0$$

$$C_x^2\,C_y-C_y^2\,C_x : \frac{\partial a}{\partial \rho^2}=\frac{\partial \alpha}{\partial \rho^2}$$

$$C_x^2\,C_z-C_y^2\,C_z : 2\,\frac{\partial a}{\partial \rho^2}+\frac{\partial a}{\partial z^2}=\frac{\partial \alpha}{\partial z^2}$$

$C_z^2 C_x - C_z^2 C_y :\ 0 = 0$

$C_x^2 C_y + C_y^2 C_x : -\dfrac{m}{2k}\dfrac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\dfrac{1}{H}\right) + a + \rho^2 \dfrac{\partial a}{\partial \rho^2} = 0$

$C_x^2 C_z + C_y^2 C_z : -\dfrac{m}{2k}\dfrac{\partial}{\partial z^2}\left(\dfrac{1}{H}\right) + a + \rho^2 \left(2\dfrac{\partial a}{\partial \rho^2} + \dfrac{\partial a}{\partial z^2} \right) = 0$

$C_z^2 C_x \ et\ C_z^2 C_y : -\dfrac{m}{2k}\dfrac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\dfrac{1}{H}\right) + a + z^2 \left(\dfrac{\partial a}{\partial \rho^2} + 2\dfrac{\partial a}{\partial z^2} \right) = 0$

$C_x C_y C_z :\ 4xyz\dfrac{\partial a}{\partial \rho^2} + 4xyz\dfrac{\partial a}{\partial \rho^2} + 4xyz\dfrac{\partial a}{\partial z^2} - 4xyz\dfrac{\partial \alpha}{\partial z^2} = 0$

Soit : $\dfrac{\partial \alpha}{\partial z^2} = \dfrac{2\partial a}{\partial \rho^2} + \dfrac{\partial a}{\partial z^2}$

Ces 10 équations sont redondantes et en résumé on obtient :

$$\frac{\partial a}{\partial \rho^2} = \frac{\partial \alpha}{\partial \rho^2} \qquad\qquad \frac{\partial \alpha}{\partial z^2} = \frac{2\partial a}{\partial \rho^2} + \frac{\partial a}{\partial z^2}$$

$$-\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right) + a + \rho^2 \frac{\partial a}{\partial \rho^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{2k}{m}\frac{\partial\left(a\rho^2\right)}{\partial \rho^2}$$

$$-\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right) + a + z^2 \frac{\partial a}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{m}{2k}\frac{\partial\left(az^2\right)}{\partial z^2}$$

Relations entre a et α :

$\dfrac{\partial a - \alpha}{\partial \rho^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad (a-\alpha) \equiv g(z^2)$ (i.e. (a-α) ne dépend pas de ρ²)

$\dfrac{\partial a - \alpha}{\partial z^2} = -2\dfrac{\partial a}{\partial \rho^2} = \dfrac{\partial g(z^2)}{\partial z^2} \equiv h(z^2) \quad \Rightarrow \quad a \equiv a\left(\rho^2, z^2\right) = -\dfrac{1}{2}h(z^2)\,\rho^2 + k_{a,\alpha}$

Pour l'instant, a (et α) dépend à toujours à priori de ρ² et z².

Utilisons les équations de 1/H et faisons les dérivations partielles croisées.

$$\frac{\partial}{\partial z^2}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{2k}{m}\frac{\partial}{\partial z^2}\frac{\partial\left(a\rho^2\right)}{\partial \rho^2} = \frac{\partial}{\partial \rho^2}\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{2k}{m}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\frac{\partial\left(az^2\right)}{\partial z^2}$$

(L'inversion est possible car les 2 variables sont indépendantes)

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial z^2}\frac{\partial\left(a\rho^2\right)}{\partial \rho^2}=\frac{\partial}{\partial \rho^2}\frac{\partial\left(az^2\right)}{\partial z^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \rho^2}\frac{\partial\left(a\rho^2\right)}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z^2}\frac{\partial\left(az^2\right)}{\partial \rho^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho^2}\frac{\partial\left(\left(-\frac{1}{2}h(z^2)\,\rho^2+k_{a,\alpha}\right)\rho^2\right)}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z^2}\frac{\partial\left(\left(-\frac{1}{2}h(z^2)\,\rho^2+k_{a,\alpha}\right)z^2\right)}{\partial \rho^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(-\frac{1}{2}\rho^4\frac{\partial h(z^2)}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial}{\partial z^2}\left(-\frac{1}{2}h(z^2)\,z^2\right)$$

$$-\rho^2\frac{\partial h(z^2)}{\partial z^2}=-\frac{1}{2}h(z^2)-\frac{z^2}{2}\frac{\partial h(z^2)}{\partial z^2}$$

Le terme de droite étant indépendant de ρ^2, nécessairement $h'(z^2) = 0$ et donc ensuite $h(z^2)=0$
Donc :

$$a\left(\rho^2,z^2\right)=-\frac{1}{2}h(z^2)\,\rho^2+k_{a,\alpha}=k_{a,\alpha}\equiv a$$

En ce qui concerne α :

$$\frac{\partial g(z^2)}{\partial z^2}=0 \quad \Rightarrow \quad g(z^2)=g_0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=\left(a-g_0\right)$$

En conclusion on voit que a et a sont nécessairement des constantes.