ASTROPHYSIQUE THÉORIQUE. — *Une méthode de résolution de l'équation de Vlasov. Application à une théorie globale, non-linéaire, de la rotation galactique et de la structure spirale galactique.* Note (*) de M. **Jean-Pierre Petit**, présentée par M. André Lichnerowicz.

Ceci est une extension d'un précédent travail [1]. Une méthode particulière de résolution de l'équation de Vlasov est proposée, où la solution se présente comme une somme de fonctions elliptiques couplées par l'intermédiaire du champ gravitationnel. Le modèle de galaxie construit à l'aide de cette solution semble offrir de nombreuses concordances avec les résultats d'observation.

Principe de la méthode. — Considérons une galaxie comme un mélange gazeux constitué par N espèces, décrites chacune par une fonction de distribution des vitesse f_i. Nous écrirons donc un système de N équations de Vlasov :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{W}_i \cdot \overrightarrow{\frac{\partial f_i}{\partial r}} + \left(\sum_{j=1}^{N} \vec{g}_j\right) \cdot \overrightarrow{\frac{\partial f_i}{\partial W_i}} = 0. \tag{1}$$

Les solutions apparaissent donc couplées par l'intermédiaire du champ gravitationnel. Soient n_i, $\vec{C}_0^i$, $\vec{C}^i = \vec{W}_i - \vec{C}_0^i$ respectivement le nombre de densité, la vitesse macroscopique et la vitesse résiduelle pour l'espèce i. Écrivons l'équation de Vlasov en termes de vitesse résiduelle :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \log f_i}{\partial t} + \vec{C}^i \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \log f_i}{\partial r}} + \vec{C}_0^i \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \log f_i}{\partial r}} \\ &+ \left(\sum_{j=1}^{N} \vec{g}_j - \overrightarrow{\frac{D_i C_0^i}{Dt}}\right) \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \log f_i}{\partial C^i}} - \overrightarrow{C^i \frac{\partial \log f_i}{\partial C^i}} : \overrightarrow{\frac{\partial C_0^i}{\partial r}} = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Nous allons ensuite donner aux fonctions f_i la forme elliptique particulière déjà développée dans la référence [1] :

$$\log f_i = \log A_i - \frac{m_i (C^i)^2}{2 k H_i} + a_i \left(\vec{C}^i . \vec{r}\right)^2 + \alpha_i \left[\vec{C}^i . \left(\vec{k} \times \vec{r}\right)\right]^2, \tag{3}$$

A_i étant pour chaque fonction le facteur de normalisation. Chaque équation de Vlasov du système (1) devient alors un polynôme de degré 3 par rapport aux composantes de la vitesse résiduelle $\vec{C}^i$, ce qui fait un total de 3 N variables. Il est possible d'identifier par rapport à chaque puissance de ces composantes, et cela séparément sur chaque équation de Vlasov, ce qui conduit à un total de 20 N équations aux dérivées partielles. De la résolution de ce système on va extraire les solutions cherchées.

Résultats de calcul. — Poursuivant la méthode développée dans [1] on obtient à l'aide des équations aux termes d'ordre 3 les fonctions H_i, a_i, α_i, puis, à l'aide des termes d'ordre 2 on construit les champs de vitesse macroscopique. Le couplage n'apparaît qu'au niveau des termes d'ordre unité, les équations correspondantes étant

$$\vec{C}^i \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \log A_i}{\partial r}} + \left(\sum_{j=1}^{N} \vec{g}_j - \overrightarrow{\frac{D_i C_0^i}{Dt}}\right) \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \log f_i}{\partial C^i}} = 0. \tag{4}$$

Pour permettre une résolution complète, ce système de 3 N équations devra être couplé aux N équations de Poisson attachées à chaque espèce *i*. Ce qui permet *a priori* d'éliminer les densités n_i et de calculer les potentiels instationnaires Ψ_i. Les équations aux potentiels peuvent se mettre sous une forme analytique dans trois cas :

A. f_i présente une symétrie sphérique dans l'espace x, y, z. On obtient alors :

$$\boxed{\Delta\Psi_i = 4\,\pi\,G P_0^i \left(1 + \frac{r^2}{(r_0^i)^2}\right)^{-1/2} \exp - \frac{m_i}{k\,T_0^i}\left(\sum_{j=1}^{N} \Psi_j + \Psi_0^i\right),} \tag{5}$$

équation qui correspond à l'équation (12) de la référence [1].

B. f_i, stationnaire, présente la symétrie sphérique dans l'espace u, v, w, des vitesses. Ce qui revient à dire que f_i est maxwellienne, auquel cas :

$$\boxed{\Delta\Psi_i = 4\,\pi\,G P_0^i \exp - \frac{m_i}{k\,T_0^i}\left(\sum_{j=1}^{N} \Psi_j + \Psi_0^i\right).} \tag{6}$$

C. f_i, elliptique, est stationnaire. Dans le plan diamétral nous avons alors :

$$\boxed{\Delta\Psi_i = 4\pi\,G P_0^i \left(1 + \frac{r^2}{(r_0^i)^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{r^2}{(r_0^i)^2} - \frac{r^2}{(r_1^i)^2}\right)^{-1/2} \exp - \frac{m_i}{k\,T_0^i}\left(\sum_{j=1}^{N} \Psi_j + \Psi_1^i\right),} \tag{7}$$

équation en tout point analogue à l'équation (15) de la référence [1].

Application : modèle de système auto-gravitant a N populations. — f_i peut décrire n'importe quel ensemble satisfaisant à l'équation de Vlasov : amas de galaxies, populations stellaires diverses dans une galaxie, étoiles d'un amas globulaire, composants divers du milieu interstellaire, ceci sur une échelle de temps donnée. Plus : si $m_i = m_j = \ldots$ la suite des fonctions f_i, f_j, ... pourra s'interpréter comme la suite des composantes de la solution $f_i + f_j + \ldots$ décrivant une population particulière de masse m_i (par exemple une certaine classe d'étoiles ou un ingrédient du milieu interstellaire). La loi de vitesse macroscopique devenant alors pour cette espèce :

$$\frac{1}{n_i + n_j + \ldots}\left(n_i \vec{C}_0^i + n_j \vec{C}_0^j + \ldots\right). \tag{8}$$

Il y a donc un notable enrichissement du modèle vis-à-vis des résultats exposés dans la référence (1), concernant les galaxies et les amas globulaires. La composition des solutions f_i, f_j, ... dans l'espace des vitesses peut traduire alors les dissymétries observées dans les distributions des vitesses. En particulier, deux phénomènes bien connus peuvent alors être pris en compte : la déviation du vertex et le courant asymétrique de Strömgren. Plus généralement, il devient possible d'étudier le comportement d'une population immergée dans une galaxie et en interaction gravitationnelle avec celle-ci.

Problème particulier de la structure spirale. — Si f_i est maxwellien, alors la composante circulaire de $\vec{C}_0^i$ correspond à une rotation en corps solide. Afin de représenter les fluctuations très non linéaires enregistrées dans le gaz interstellaire il est donc indiqué de décrire celui-ci par la solution

$$f_g = f_{g1} + f_{g2}, \tag{9}$$

où la seconde composante, maxwellienne, rendra compte de la fluctuation. Dans ces conditions la composante circulaire de la vitesse de groupe $\vec{C}_{0g}^2$ correspond à une rotation en corps solide et ainsi se trouve réglé le problème de la persistance de la structure et de sa non destruction par la rotation différentielle, laquelle est prise en charge par la solution elliptique f_{g1}. Remarquons que la fonction f_{g2} peut être négative en certains points, du moment que la densité totale $n_g = n_{g1} + n_{g2}$ reste positive.

Si l'on admet que les populations stellaires sont exemptes de fluctuations du type spiral et qu'elles génèrent la majeure partie du potentiel gravitationnel, on peut envisager en première approximation un découplage des solutions, en calculant d'abord le potentiel stellaire, puis celui du gaz. Quitte à remettre sur le métier en étudiant ensuite l'incidence de la fluctuation due au gaz sur la distribution stellaire.

Lorsqu'on linéarise l'équation du type (6) représentant la fluctuation non linéaire dans le gaz, on obtient

$$\Delta\Psi_{g2} + \frac{\Psi_{g2}}{(L_{g2})^2} = 4\pi G (mg)^2 n_{g2}^0 - \frac{\Psi_s + \Psi_{g0}^2 + \Psi_{g1}}{(L_{g2})}, \tag{10}$$

ce qui est une variante de l'équation de Helmoltz déjà obtenue dans un précédent travail [référence (2)]. Ceci nous permet d'emblée de conclure que l'équation (10) recèle bien des fluctuations spirales ou en anneau.

PROBLÈMES CATACLYSMIQUES DANS LES GALAXIES. — L'enrichissement du modèle va nous permettre de construire des courbes de rotation beaucoup plus complexes que celles indiquées sur la figure de la référence (1). Une propriété cependant se conserve, dans cette représentation à plusieurs populations : dans tous les cas la vitesse radiale d'une population est proportionnelle à la distance au centre du système, comme dans la loi de Hubble. Ceci semble bien être une propriété intrinsèque de ce type de solutions de l'équation de Vlasov, appliquée aux problèmes gravitationnels. Si les mesures effectuées dans les galaxies s'accordent avec cette loi on pourra attribuer au phénomène un caractère purement gravitationnel. Si par contre un écart important se manifeste c'est qu'il se passe dans le noyau de la galaxie en question quelque chose qui sort du cadre de la théorie des ondes de densité. On pense bien sûr aux galaxies de Seyfert. Étant donné le caractère hautement non linéaire des fluctuations dans le gaz, il serait possible que celle-ci soient à même de déclencher dans les noyaux des processus catastrophiques semblables à ceux déjà évoqués par Zwicky : des masses gazeuses représentant plusieurs centaines de masses solaires (voire plusieurs milliers) implosent en donnant naissance à des essaims d'étoiles, qui explosent alors en chaîne, produisant un fantastique dégagement d'énergie.

(*) Séance du 10 juillet 1972.

(1) J.-P. PETIT, *Comptes rendus*, 274, série B, 1972, p. 373.
(2) J.-P. PETIT, *Comptes rendus*, 272, série B, 1971, p. 1389.
(3) J.-P. PETIT, *Comptes rendus*, 274, série B, 1972, p. 510.
(4) J.-P. PETIT, *Comptes rendus*, 274, série B, 1972, p. 574.
(5) I. A. U. SYMPOSIUM 3 : D. Reidel Publisher (Holland), 1970. Articles de J. H. OORT, G. CONTOPOULOS, C. I. BERRY et P. O. VANDERVOORT, C. C. LIN, C. YUAN, F. H. SHU, Sir R. WOOLEY, D. LYNDEN-BELL.

Laboratoire de Dynamique des Systèmes réactifs, Faculté des Sciences de Saint-Jérôme, traverse de la Barasse, 13013 Marseille, Bouches-du-Rhône.