ASTROPHYSIQUE THÉORIQUE. — *Instabilité gravitationnelle, analyse non linéaire.* Note (*) de M. **Jean-Pierre Petit**, présentée par M. André Lichnerowitz.

Une analyse non linéaire de l'instabilité gravitationnelle est donnée où l'on suppose que la distribution de vitesse est localement maxwellienne. On utilise les concepts de la théorie cinétique des gaz et le formalisme de Chapman et Cowling.

Reconduisant le raisonnement développé dans l'analyse linéaire [*voir* note précédente ([5])], nous cherchons cette fois les solutions maxwelliennes de l'équation de Boltzmann qui sera écrite en termes de vitesse résiduelle :

$$\frac{\partial \log f^{(0)}}{\partial t} + \vec{C}\cdot\overrightarrow{\frac{\partial \log f^{(0)}}{\partial r}} + \vec{C}_0\cdot\overrightarrow{\frac{\partial \log f^{(0)}}{\partial r}} + \left(\vec{g} - \overrightarrow{\frac{DC_0}{Dt}}\right)\cdot\frac{\partial \log f^{(0)}}{\partial C} - \overrightarrow{\overrightarrow{\frac{\partial \log f^{(0)}}{\partial C}\, C}} : \overrightarrow{\overrightarrow{\frac{\partial C_0}{\partial r}}} = 0. \tag{1}$$

Dans l'expression (1) apparaissent les puissances successives des composantes de $\vec{C}$, vitesse résiduelle et variable indépendante. L'identification sur les termes d'ordre trois conduit à

$$\overrightarrow{\frac{\partial T}{\partial r}} = 0. \tag{2}$$

Le phénomène est donc isotherme. Compte tenu de cette simplification l'équation (1) s'écrit alors :

$$\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{3}{2T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{n}\vec{C}_0\cdot\overrightarrow{\frac{\partial n}{\partial r}} + \frac{1}{n}\vec{C}\cdot\overrightarrow{\frac{\partial n}{\partial r}} + \frac{m}{kT}\left(\overrightarrow{\frac{\partial \psi}{\partial r}} + \overrightarrow{\frac{DC_0}{Dt}}\right)\cdot\vec{C} + \frac{m\,C^2}{2kT^2}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{m}{kT}\overrightarrow{\overrightarrow{CC}} : \overrightarrow{\overrightarrow{\frac{\partial \mathring{C}_0}{\partial r}}} = 0, \tag{3}$$

ce qui conduit à la solution

$$\vec{C}_0 = \vec{\omega}(t) \times \vec{r} - \frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial t}\vec{r}. \tag{4}$$

On a superposition d'une rotation en corps solide et d'un mouvement radial isotrope proportionnel à la distance au centre des coordonnées. Si $\partial T/\partial t < 0$ il y a expansion. Le champ radial est perçu de manière identique pour un observateur, quelle que soit sa position dans l'espace.

On retrouve ainsi la loi de Hubble. Les termes d'ordre zéro conduisent à l'adiabaticité :

$$\frac{D}{Dt}\frac{n}{T^{\frac{3}{2}}} = 0. \tag{5}$$

L'équation issue des termes d'ordre unité s'écrit :

$$\frac{1}{n}\frac{\overrightarrow{\partial n}}{\partial r} + \left(\frac{\overrightarrow{\partial \psi}}{\partial r} + \frac{\overrightarrow{DC_0}}{Dt}\right)\frac{m}{kT} = 0. \tag{6}$$

Deux situations conduisent à des résultats synthétiques : ce sont celles où $\overrightarrow{DC_0}/Dt$ peut se mettre sous la forme d'un gradient.

a. Cas instationnaire unidimensionnel : $\omega = 0$,

$$\frac{\overrightarrow{\partial C_0}}{\partial t} + \vec{C_0}\cdot\frac{\overrightarrow{\overrightarrow{\partial C_0}}}{\partial r} = \frac{\overrightarrow{\partial \psi_0}}{\partial r}, \tag{7}$$

où

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\log\frac{1}{\sqrt{T}} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^2\right] r^2, \tag{8}$$

il vient

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial r}\left[\log n + \frac{m}{kT}(\psi + \psi_0)\right] = 0 \tag{9}$$

ou

$$n = n_0\, e^{-\frac{m}{kT}(\psi + \psi_0)} \tag{10}$$

en introduisant la loi de Poisson il vient

$$\Delta\psi = 4\pi G n_0 m\, e^{-\frac{m}{kT}(\psi + \psi_0)}, \tag{11}$$

cette équation est à relier à

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{1}{\sqrt{T}}\right)\frac{r\,\partial}{\partial r}\right\}\left(\frac{n}{T^{\frac{3}{2}}}\right) = 0. \tag{12}$$

b. Situation de régime permanent :

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{C_0}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\partial n}}{\partial r} = 0, \\ \vec{C_0}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\overrightarrow{\partial C_0}}}{\partial r} = \dfrac{\overrightarrow{\partial \psi_1}}{\partial r}, \end{array}\right. \tag{13}$$

avec

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\,\omega^2\,(x^2 + y^2), \tag{14}$$

ce qui conduit à

$$\Delta\psi = 4\pi G n_0 m\, e^{-\frac{m}{kT}(\psi + \psi_1)} \quad [\textit{voir } (^3)]. \tag{15}$$

Les équations (11) et (15) peuvent se mettre sous la forme d'équations de Fredholm au noyau symétrique non dégénéré :

$$\frac{m^2 G}{k T} \int \frac{n(\vec{r}')\, \vec{dr}'}{|\vec{r}' - \vec{r}|} + \log \frac{n}{n_0} = \psi_j, \qquad \text{avec } j = 0 \text{ ou } 1. \tag{16}$$

Remarque I. — Linéarisons l'équation (11). Le terme $(\partial/\partial t) \log 1/\sqrt{T})^2$ est à négliger car il provient du terme quadratique : $\vec{C}_0 . \left(\overrightarrow{\partial C_0 / \partial r}\right)$. On retrouve l'équation de Jeans, du moins sous la forme (13) de la précédente Note.

Remarque II. — Dans l'équation (11) le terme ψ_0 représente l'action des forces d'inertie. Nous avons vu que la solution était absolument indépendante du choix du centre des coordonnées (propriété du champ de vitesse de Hubble). Nous avons opéré dans un espace euclidien en supposant la propagation du champ gravitationnel instantané. Il conviendrait de replacer cette étude dans le cadre de la relativité générale. Reprenant un raisonnement dû à Zwicky nous dirons que l'instabilité cesse de se manifester lorsque le temps de Jeans qui lui est associé devient de l'ordre du temps de propagation du champ gravitationnel sur la distance de Jeans, c'est-à-dire lorsque

$$\frac{l}{c} = (4 \pi G\, mn)^{-\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

En prenant la valeur $mn = 10^{-30}$ g/cm^3 on obtient pour l la valeur $4{,}94\ 10^{10}$ années lumières, ce qui est de l'ordre du diamètre estimé de l'Univers. On remarquera encore en dernier lieu qu'une rotation en corps solide est imperceptible à un observateur lié au milieu.

(*) Séance du 10 janvire 1972.

(1) Sir J. JEANS, *Astronomy and Cosmology*, Dover Publication, 1961.
(2) S. CHAPMAN et T. G. COWLING, *The mathematical theory of non-Uniform gases*, Cambridge University Press, 1958.
(3) S. CHANDRASEKHAR, *Principles of stellar dynamics*, Dover Publication, 1942.
(4) J. P. PETIT, *Comptes rendus*, 272, série B, 1971, p. 1389.
(5) J. P. PETIT, *Comptes rendus*, 274, série B, 1972, p. 510.

Laboratoire de Dynamique des Systèmes réactifs, Faculté des Sciences de Saint-Jérôme, traverse de la Barasse, 13-Marseille, Bouches-du-Rhône.

et

Observatoire de Marseille, place Leverrier, 13-Marseille, Bouches-du-Rhône.