ASTROPHYSIQUE THÉORIQUE. — *Instabilité gravitationnelle, analyse linéaire.* Note (*) de M. **Jean-Pierre Petit**, présentée par M. André Lichnerowicz.

L'équation de l'instabilité gravitationnelle, fournie par Sir J. Jeans en 1902 se trouve réétablie par le truchement de la théorie cinétique.

Soit f la fonction de distribution décrivant un milieu constitué de particules identiques de masse m. Supposons que celle-ci puisse se mettre sous la forme

$$f = f^{(0)} + f^{(1)}, \tag{1}$$

où $f^{(0)}$ est une fonction maxwellienne et $f^{(1)}$ une fonction générant des moments nuls, c'est-à-dire telle que

$$\int \psi^{(i)} f^{(1)}\, d\vec{w} = 0, \tag{2}$$

avec

$$\psi^{(i)} = 1, \vec{C}, C^2 \qquad \text{(invariants globaux)}.$$

Situons maintenant f dans un espace fonctionnel E tel que E^0 représente l'ensemble des maxwelliennes, repérées par la donnée de (n, T, C_0), et E^1 l'ensemble des fonctions générant des moments nuls. Dans cette hypothèse utilisons la représentation de la figure.

Le point O figure la fonction nulle, L'axe $\overrightarrow{O\mathcal{M}}$ l'ensemble E^0 et l'axe $\overrightarrow{O\mathcal{F}}$ l'ensemble E^1. Soit une perturbation δf apportée à une maxwellienne $f^{(0)}$. Supposons de plus que cette maxwellienne soit à l'instant initial uniforme dans tout l'espace. $\delta^0 f$ et $\delta^1 f$ figurent les projections de δf sur les deux axes $\overrightarrow{O\mathcal{M}}$ et $\overrightarrow{O\mathcal{F}}$. Nous allons associer δf à l'instabilité gravitationnelle. Supposons le milieu collisionnel. La fonction f obéira à l'équation de Boltzmann :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial_e f}{\partial t}. \tag{3}$$

Nous remarquerons que

$$\frac{\partial_e}{\partial t}(f^{(0)} + \delta^0 f) = 0.$$

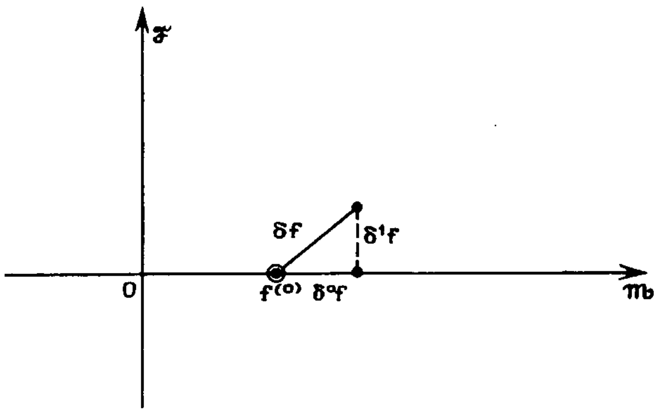
On peut écrire :

$$\delta^0 f = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n}\,\delta n + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\,\delta T + \overrightarrow{\frac{\partial f^{(0)}}{\partial C_0}} \cdot \overrightarrow{\delta C_0}. \tag{4}$$

Cherchant à évaluer $\delta^1 f$ introduisons d'abord la perturbation $\delta^0 f$ et calculons la solution qui en découle. Utilisant une solution normale de Grad nous écrirons :

$$\delta^1 f = \mathrm{A}\left(\frac{mc^2}{2\,k\,\mathrm{T}} - \frac{5}{2}\right)\left(\vec{\mathrm{C}}\cdot\overrightarrow{\frac{\partial \log \mathrm{T}}{\partial r}}\right) + \mathrm{B}\vec{\mathrm{C}}\vec{\mathrm{C}} : \overrightarrow{\overrightarrow{\frac{\partial \mathrm{C}_0}{\partial r}}}. \tag{5}$$

Nous verrons plus loin que la solution $\delta^0 f$ entraîne la nullité de $\delta^1 f$. Ce type de phénomène implique que le temps de relaxation de la fonction de distribution τ (qui est de l'ordre du temps de libre parcours) soit faible devant le temps $\mathcal{T}$ rythmant l'évolution des paramètres macros-



copiques (qui est de l'ordre du temps de Jeans). Ceci peut nous permettre d'analyser les perturbations gravitationnelles sévissant dans un milieu fortement collisionnel, initialement homogène et maxwellien.

Introduisant $\delta^0 f$ dans l'équation de Boltzmann, il vient

$$\frac{\partial \delta^0 f}{\partial t} + \vec{\mathrm{C}}\cdot\overrightarrow{\frac{\partial \delta^0 f}{\partial r}} + \vec{\delta g}\cdot\overrightarrow{\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathrm{C}}} = 0. \tag{6}$$

En introduisant (4) dans (6) on obtient une expression où figurent les puissances successives des composantes de la vitesse résiduelle, variable indépendante. En identifiant sur chacune de ces puissance on obtient aisément la solution

Termes ordre 3 :

$$\overrightarrow{\frac{\partial \delta \mathrm{T}}{\partial r}} = 0 \qquad \text{(isothermie).} \tag{7}$$

Termes d'ordre 2 :

$$\overrightarrow{\delta \mathrm{C}_0} = \overrightarrow{\delta\omega\,(t)}\times\vec{r} - \frac{1}{2\,\mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}\vec{r}. \tag{8}$$

Soit un champ de vitesse qui est la superposition d'une rotation de corps solide et d'un mouvement radial isotrope proprotionnel à la distance au centre. On retrouve là la loi de Hubble.

Termes d'ordre 1 :

(9) $$\delta\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{n}{T^{3/2}}\right) = 0 \quad \text{(adiabaticité).}$$

L'équation aux termes d'ordre 3 s'écrit

(10) $$\frac{m}{kT}\frac{\partial \delta \overrightarrow{C_0}}{\partial t} + \frac{1}{n}\frac{\overrightarrow{\partial \delta n}}{\partial r} + \frac{m}{kT}\frac{\overrightarrow{\partial \delta \psi}}{\partial r} = 0,$$

$\delta\psi$ étant le potentiel gravitationnel de perturbation. Multipliant cette équation par $\vec{\partial}/\partial r$ et introduisant la conservation de la masse on obtient

(11) $$-\frac{m}{kT}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial \delta n}{\partial t}\right) + \frac{1}{n}\Delta\delta n + \frac{m}{kT}\Delta\delta\psi = 0,$$

en posant

(12) $$L^2 = \frac{kT}{4\pi G n m^2} \quad \text{(longueur de Jeans)}$$

et en introduisant la loi de Poisson :

(13) $$\Delta\delta\psi = 4\pi G n \delta n.$$

Il vient aisément

(14) $$\Delta\left\{\Delta\delta\psi + \frac{\delta\psi}{L^2} - \frac{m}{kT}\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial t^2}\right\} = 0,$$

avec la solution

(15) $$\Delta\delta\psi + \frac{\delta\psi}{L^2} - \frac{m}{kT}\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial t^2} = 0.$$

On retrouve l'équation de Jeans ([1]) qui se trouve ici réétablie à l'aide de la théorie cinétique des gaz.

(*) Séance du 10 janvier 1972.

([1]) Sir J. Jeans, *Astronomy and Cosmology*, Dover Publication, 1961.
([2]) S. Chapman et T. G. Cowling, *The mathematical theory of non uniform gases*, Cambridge University Press, 1958.
([3]) S. Chandrasekhar, *Principles of stellar dynamics*, Dover Publication, 1942.
([4]) K. F. Ogorodnikov, *Dynamics of stellar systems*, Pergamon Press, 1965.
([5]) J. P. Petit, *Comptes rendus*, 272, série B, 1971, p. 1389.
([6]) J. P. Petit, *Comptes rendus*, 274, série B, 1972, p. 373.

Laboratoire de Dynamique des Systèmes réactifs, Faculté des Sciences de Saint-Jérôme, Traverse de la Barasse, 13-Marseille, Bouches-du-Rhône

et

Observatoire de Marseille, place Leverrier, 13-Marseille, Bouches-du-Rhône.